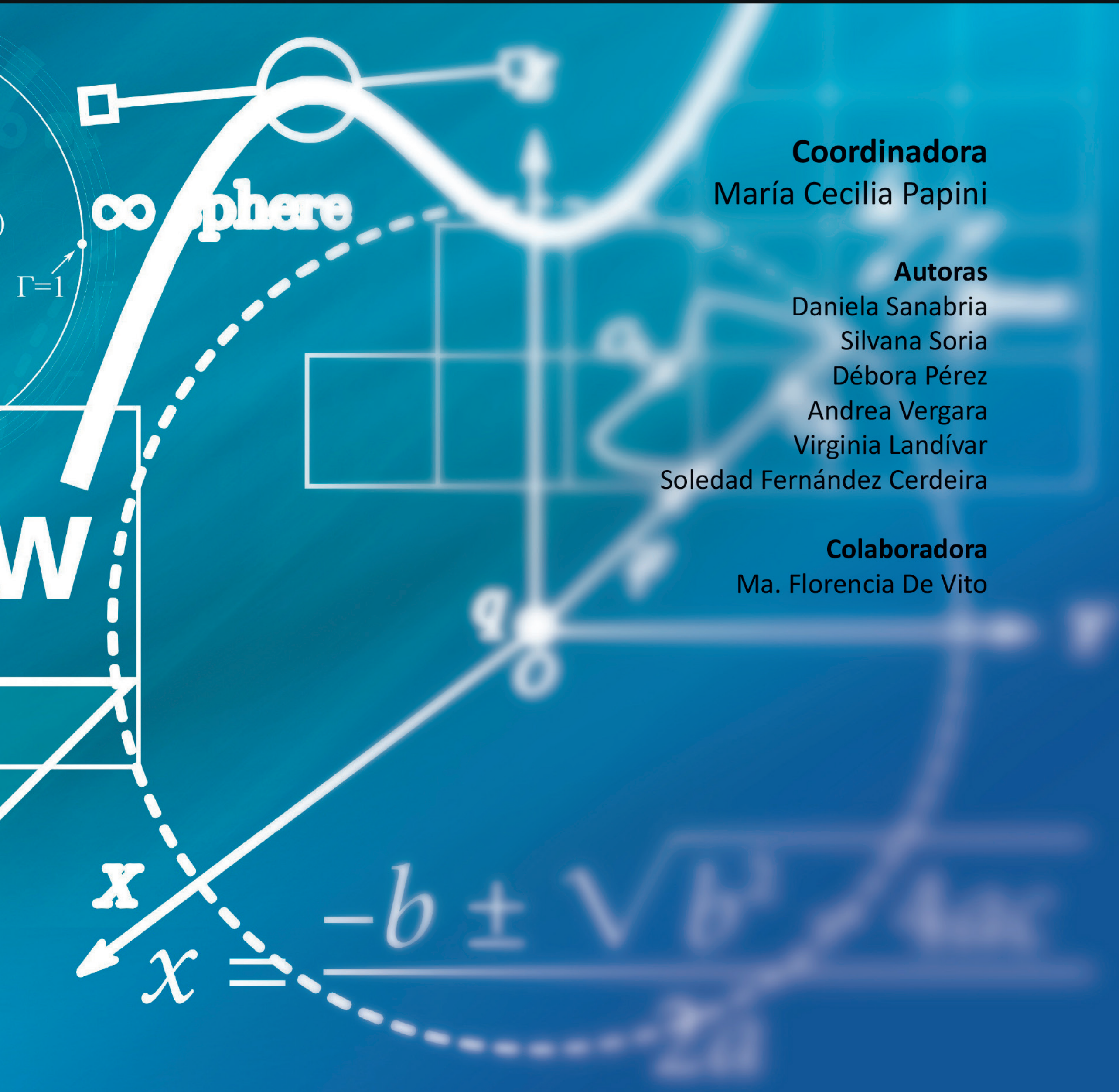
MATEMÁTICA

ENTRE LA SECUNDARIA Y LA UNIVERSIDAD



Coordinadora
María Cecilia Papini

Autoras
Daniela Sanabria
Silvana Soria
Débora Pérez
Andrea Vergara
Virginia Landívar
Soledad Fernández Cerdeira

Colaboradora
Ma. Florencia De Vito

editorial UNICEN

MATEMÁTICA
ENTRE LA SECUNDARIA Y LA UNIVERSIDAD

UNCPBA

Rector
Cr. Roberto Tassara

Secretaria Académica
Prof. Mabel Pacheco

Programa NEXOS

Ministerio de Educación,
Cultura, Ciencia y Tecnología
Presidencia de la Nación

MATEMÁTICA
ENTRE LA SECUNDARIA Y LA UNIVERSIDAD

COORDINADORA
MARÍA CECILIA PAPINI

AUTORAS
MA. DANIELA SANABRIA
SILVANA SORIA
DÉBORA PEREZ
ANDREA VERGARA
VIRGINIA LANDÍVAR
SOLEDAD FERNÁNDEZ CERDEIRA

COLABORADORA
MA. FLORENCIA DE VITO

EDITORIAL UNICEN

TANDIL 2019

Matemática : entre la secundaria y la universidad / Daniela Sanabria ... [et al.] ; coordinación general de María Cecilia Papini. - 1a ed . - Tandil: Editorial UNICEN, 2019.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-4901-14-9

1. Números Reales. 2. Álgebra. 3. Ciencias Exactas. I. Sanabria, María Daniela. II. Papini, María Cecilia, coord. III. Título.
CDD 510.7

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Secretaría Académica. Editorial UNICEN
Pinto 399, 2° piso, Tandil (7000), Provincia de Buenos Aires
Tel./Fax: 0249 4422000
e-mail: c-editor@rec.unicen.edu.ar
www.editorial.unicen.edu.ar

1ª edición: marzo 2019

Responsable editorial
Lic. Gerardo Tassara

Corrección
Lic. Ramiro Tomé

Diseño de Tapa y Maquetación
D.G. Gabriela Callado

Hecho el depósito que marca la Ley 11.723
ISBN 978-987-4901-14-9

ÍNDICE

Agradecemos a las autoridades de esta Facultad por el apoyo
que recibimos para la elaboración de este material y, más aún,
por concebir y sostener el Programa de Ingreso a la Facultad de Ciencias
Exactas (PIEXA) que es evidencia del propósito de acercar
a cada ciudadano la posibilidad de estudiar en la universidad.

Equipo Docente del PIEXA

CAPÍTULO 1

NÚMEROS REALES

¿EN QUÉ SE DIFERENCIAN LOS NÚMEROS?

Encierren el / los conjuntos numéricos al / a los cual/es pertenece/n los siguientes números

- $2 \quad \in \quad \mathbb{N} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q} \quad \mathbb{I} \quad \mathbb{R}$
- $-5 \quad \in \quad \mathbb{N} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q} \quad \mathbb{I} \quad \mathbb{R}$
- $-\frac{7}{8} \quad \in \quad \mathbb{N} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q} \quad \mathbb{I} \quad \mathbb{R}$
- $\sqrt{16} \quad \in \quad \mathbb{N} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q} \quad \mathbb{I} \quad \mathbb{R}$
- $\sqrt[3]{5} \quad \in \quad \mathbb{N} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q} \quad \mathbb{I} \quad \mathbb{R}$
- $\pi \quad \in \quad \mathbb{N} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q} \quad \mathbb{I} \quad \mathbb{R}$
- $-7{,}53 \quad \in \quad \mathbb{N} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q} \quad \mathbb{I} \quad \mathbb{R}$

Se lee: –7,53 pertenece (∈) a alguno/s de los siguientes conjuntos.

Un concepto básico y elemental del lenguaje matemático es el de **número**. Para poder trabajar en matemática, es necesario comprender la noción de número, sus propiedades y sus transformaciones.

CONJUNTOS NUMÉRICOS

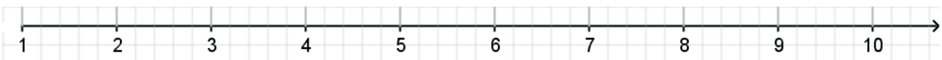
NÚMEROS NATURALES

Llamamos $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales, también llamados números enteros positivos, es decir:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6, \ldots\}$$

La secuencia para encontrar cada número natural es sumar uno al anterior. La representación en la recta numérica es:

La aritmética es la rama de las matemáticas que estudia las operaciones de los números y sus propiedades elementales. Proviene del griego *arithmós* y *téchne*, que significan *números* y *habilidad*, respectivamente.

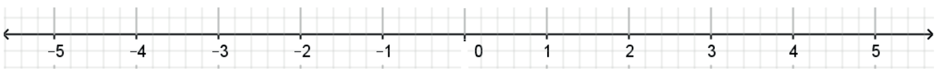


NÚMEROS ENTEROS

El conjunto de los números enteros, al que denominamos $\mathbb{Z}$, es el conjunto de los números naturales más el cero y los enteros negativos, es decir:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

La representación en la recta numérica es:



NÚMEROS RACIONALES

El conjunto de los números racionales está formado por las fracciones, es decir, por todos los números que pueden formarse a partir de la división de dos enteros. Los números racionales representan partes de un todo. Este conjunto numérico se simboliza con la letra $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \; y \; b \neq 0\right\}$$

Se lee: El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ son aquellos que se pueden expresar como $\frac{a}{b}$ donde a y b pertenecen ($\in$) al conjunto de los enteros ($\mathbb{Z}$) y b es distinto de 0.

A los números enteros que forman el cociente $\frac{a}{b}$ se los llama numerador (a) y denominador (b). Todo número racional puede ser representado con una expresión decimal finita o periódica.

¿Cómo realizarían el pasaje de fracción a decimal?

EJEMPLO

$\frac{3}{2} = 1{,}5$

$\frac{23}{10} = 2{,}3$

$-\frac{5}{6} = -0{,}8333333333 \ldots = -0{,}8\overline{3}$

$\frac{7}{3} = 2{,}333333333 \ldots = 2{,}\overline{3}$

EXPRESIONES DECIMALES EXACTAS Y PERIÓDICAS

¿En qué se diferencian las anteriores expresiones decimales?

Recordemos que las expresiones decimales se diferencian en EXACTAS y PERIÓDICAS.

- *Expresiones decimales exactas:* Son aquellas expresiones decimales cuya parte decimal es finita.

EJEMPLO

$\frac{3}{2} = 1{,}5$ $\frac{1}{4} = 0{,}25$ $\frac{23}{10} = 2{,}3$

Logramos el pasaje de una expresión decimal exacta a su expresión fraccionaria de la siguiente manera:
Formamos el numerador escribiendo la parte entera y la parte decimal juntas, es decir, el número "sin la coma", y el denominador se forma por un número que comienza en 1 seguido de tantos 0 como cifras decimales se tenga.

EJEMPLO

$1{,}5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$ $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ $2{,}3 = \frac{23}{10}$

- *Expresiones decimales periódicas:* Son aquellas expresiones decimales cuya parte decimal está formada por cifras que se repiten indefinidamente.

EJEMPLO

$-\frac{5}{6} = -0{,}8333333333\ldots = -0{,}8\overline{3}$ $\frac{7}{3} = 2{,}333333333\ldots = 2{,}\overline{3}$

Las expresiones decimales periódicas se clasifican en:

- *Expresiones decimales periódicas puras:* su parte decimal es periódica en su totalidad. Hacemos su pasaje aplicando la siguiente regla:
  En el numerador colocamos todo el número, sin la coma, y restamos la parte entera; el denominador lo formamos con tantos 9 como cifras tenga el período.

EJEMPLO

$$2{,}333333333\ldots = 2{,}\overline{3} = \frac{23-2}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

- *Expresiones decimales periódicas mixtas:* su parte decimal está formada por una o más cifras no periódicas, seguidas de una cifra o varias cifras periódicas.
  Hacemos su pasaje aplicando la siguiente regla:
  En el numerador escribimos todo el número (sin la coma) menos el número formado por la parte entera y la/s cifra/s no periódica/s. En el denominador, escribimos tantos 9 como cifras tenga el período y tantos 0 como cifras decimales no periódicas tenga.

EJEMPLO

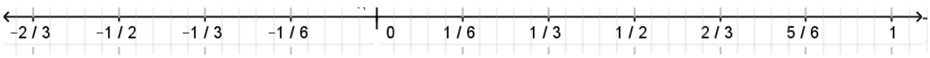
$$-0{,}8333333333\ldots = -0{,}8\overline{3} = -\frac{83-8}{90} = -\frac{75}{90} = -\frac{5}{6}$$

$$5{,}8732323232\ldots \;=\; 5{,}87\overline{32} = \frac{58732-587}{9900} = \frac{58145}{9900}$$

Para ubicar fracciones en la recta numérica dividimos la unidad (el entero) en tantos segmentos iguales como indica el denominador, y se ubica la fracción según indica el numerador:

EJEMPLOS

Si debemos ubicar números con denominador 6, dividimos la unidad en 6 partes iguales.



A los puntos de la recta que corresponden a números racionales se los llama *puntos racionales.*
En cualquier segmento AB de la recta, existe un punto racional, o lo que es equivalente, entre dos puntos A y B cualesquiera existen infinitos puntos racionales. Sin embargo, los puntos racionales, a pesar de estar tan próximos como se desee, no llenan la recta.

¿Cuál es la expresión decimal de los números $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; π ; e?
¿Pueden clasificar su expresión decimal?

NÚMEROS IRRACIONALES

Existen números decimales que no pueden expresarse como fracción. Esos números pertenecen al conjunto de los números irracionales y dicho conjunto se denota con la letra $\mathbb{I}$.

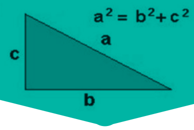
EJEMPLOS

$\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; π ; e ; $\sqrt{p}$ (si p es un n° primo)

Para representar un número irracional que se exprese como raíz cuadrada de un número que no sea cuadrado perfecto $\sqrt{p}$, debemos basarnos en el Teorema de Pitágoras.

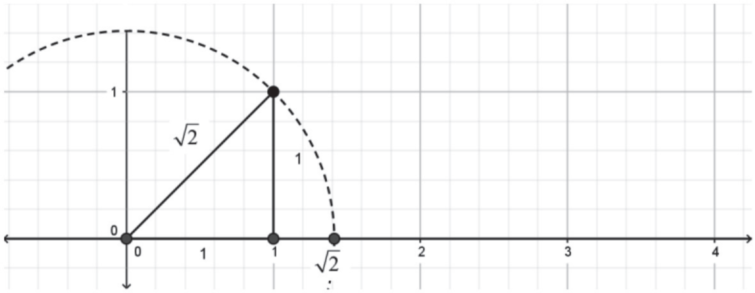
Nota: Un número se define cuadrado perfecto si su raíz cuadrada es un número entero.

Teorema de Pitágoras
En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



EJEMPLO

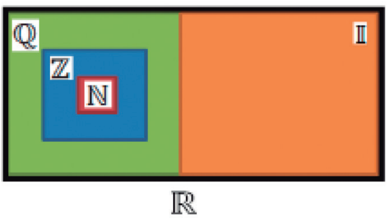
Para ubicar $\sqrt{2}$ en la recta numérica, debemos considerar dicho número como la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo.



Te proponemos ubicar en la recta numérica $\sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt{13}$

La unión del conjunto de los números racionales y el de los números irracionales es el conjunto de **números reales** $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$$



Se lee: La unión ($\cup$) de los conjuntos racionales ($\mathbb{Q}$) e irracionales ($\mathbb{I}$) es igual a todos los números reales ($\mathbb{R}$)

¿A qué distancia de 0 están los números 3 y -3?
¿Qué valores de "x" son solución de $x^2 = 4$?

VALOR ABSOLUTO DE NÚMEROS REALES

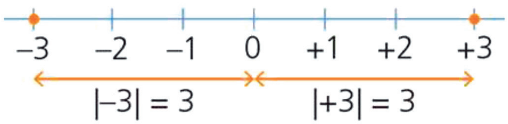
Todo número real se puede representar en la recta numérica. Definimos valor absoluto o módulo de un determinado número a la distancia que posee dicho número al cero. En símbolos:

$$|a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}$$

Las barras se leen como el valor absoluto de lo que está dentro de ellas.

EJEMPLO

$|3| = 3$ $\qquad$ $|-3| = 3$



$$|15 - 20| = |-5| = 5$$

Verdadero o falso:

- $(4-3)+5 = 4-(3+5)$ V F
- $5-3 = 3-5$ V F
- $5 \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) = 5 \cdot \left[\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{7}{4}\right)\right]$ V F
- $\left(\sqrt{8}+\sqrt{2}\right) \cdot 2 = 2 \cdot \sqrt{8} + 2\sqrt{2}$ V F
- $-5+0 = -5 \cdot 0$ V F

PROPIEDADES EN $\mathbb{R}$

Al operar con números reales se presentan ciertas propiedades. Sean $a, b, c, \in \mathbb{R}$

Propiedad	Adición	Producto
Asociativa	$a + (b+c) = (a+b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Conmutativa	$a+b = b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Elemento Neutro	$a+0 = 0+a = a$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Elemento inverso	$a+(-a) = -a+a = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$
Distributiva del producto con respecto a la adición	$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	

PARA COMPLETAR

Cada uno de los enunciados siguientes es una consecuencia de alguna de las propiedades enunciadas anteriormente, indiquen en cada caso cual es aplicable:

CÁLCULO	PROPIEDAD
A. $3 + (-3) = 0$	
B. $7 \cdot (x + y) = 7 \cdot x + 7 \cdot y$	
C. $2 + (x + 3) = (x + 3) + 2$	
D. $-7+(5+1)=(-7+5)+1$	
E. $4 \cdot (x \cdot 5) = (x \cdot 4) \cdot 5$	

OPERACIONES EN $\mathbb{Q}$

ADICIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Para poder sumar números racionales expresados en fracción, éstos deben tener un mismo denominador.

- Si los números tienen igual denominador, sumamos y restamos sus numeradores según corresponda:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

EJEMPLO

$$\frac{5}{9} + \frac{14}{9} = \frac{5 + 14}{9} = \frac{19}{9}$$

- Si los números tienen distinto denominador, debemos expresarlos en fracciones equivalentes, cuyos denominadores sean el *mínimo común múltiplo* entre los denominadores:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$30 = 2 \times 3 \times 5$
$45 = 3^2 \times 5$

m.c.m. $(30, 45) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$

El mínimo común múltiplo de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes distinto de cero.
Para calcularlo descomponemos los números en factores primos y el mínimo común múltiplo será igual al producto de los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.
El mínimo común múltiplo de dos números *primos entre sí* es su producto.

EJEMPLO

$$\frac{5}{8}+\frac{1}{6}=\frac{15}{24}+\frac{4}{24}=\frac{19}{24}$$

$$\frac{5}{6}-\frac{7}{12}=\frac{10}{12}-\frac{7}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

Restar un número es igual a sumar su opuesto:
$a-b=a+(-b)$

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

La multiplicación de fracciones da como resultado una nueva fracción cuyo nuevo numerador es el producto de los numeradores y el nuevo denominador es el producto de los correspondientes denominadores. En símbolos:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

EJEMPLO

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

$$5\cdot\frac{8}{3}=\frac{5}{1}\cdot\frac{8}{3}=\frac{5\cdot 8}{1\cdot 3}=\frac{40}{3}$$

Todo número entero es también racional ya que se puede expresar como fracción
$\frac{a}{b}$ con $b=1$: $a=\frac{a}{1}$

¿Qué resultado tienen las siguientes operaciones:
$\frac{4}{7}:\frac{2}{5}=$? ¿Y $\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{2}=$?

¿Qué relación tienen los números $\frac{2}{5}$ y $\frac{5}{2}$?

Dividir por un número es igual a multiplicar por su inverso:
$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

¿Prefieren comer las tres cuartas partes de una pizza o las $\frac{9}{12}$?

FRACCIONES EQUIVALENTES

Son aquellas fracciones que representan una misma cantidad. Podemos establecer fracciones equivalentes por dos métodos:

- *Simplificación:* realizamos la división exacta del numerador y del denominador por un mismo número.

Ejemplo: $\frac{15}{90} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{6}$

Se llama **fracción irreducible** a la fracción que no puede simplificarse más.

- Amplificación: multiplicamos por un mismo número el numerador y el denominador.

Ejemplo: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$

La Hidra de Lerna es un personaje mitológico que aparece en algunas historias, como la de las doce pruebas de Hércules. La Hidra era un monstruo con una cabeza, pero si se le cortaba, le nacían dos cabezas en su lugar. Si un héroe intentaba vencerla cortándole todas sus cabezas cada día, ¿Cuántas cabezas tendría laHidra el tercer día? ¿Y al cabo de diez días intentando vencerla?

POTENCIACIÓN DE NÚMEROS REALES

Dados un número real a y un número entero n, definimos la potencia a^n como el resultado de multiplicar a por sí mismo una cantidad n de veces. En símbolos:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

En tal caso, llamamos al número a "base" de la potencia y a n, "exponente".

PROPIEDADES

Sean a, b, $\in$, $\mathbb{R}$, y, n, $\in$, $\mathbb{Z}$, se cumple:

PROPIEDAD	EN SÍMBOLOS	EJEMPLO
DISTRIBUTIVA CON RESPECTO A LA MULTIPLICACIÓN	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$
DISTRIBUTIVA CON RESPECTO A LA DIVISIÓN	$(a:b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = a^n : b^n;\ b \neq 0$	$\left(\frac{2}{3}:\frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 : \left(\frac{1}{6}\right)^2$
PRODUCTO DE POTENCIAS DE IGUAL BASE	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$
COCIENTE DE POTENCIAS DE IGUAL BASE	$a^n : a^m = a^{n-m}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^5 : \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$
POTENCIA DE OTRA POTENCIA	$[a^n]^m = (a)^{n \cdot m}$	$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$
POTENCIAS DE EXPONENTE NEGATIVO	$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$	$\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$

En la propiedad *potencias de exponente negativo,* ¿por qué elevar a un exponente negativo es igual a invertir la base y aplicar la potencia positiva?

EJEMPLO

$$\frac{a^{-3} \cdot a^4 : a^5}{(a^2)^{-3}} = \frac{a^{-3+4-5}}{a^{-6}} = \frac{a^{-4}}{a^{-6}} = a^{-4-(-6)} = a^2$$

$$\left(\frac{2 \cdot x^2 \cdot y}{w^3}\right)^4 = \frac{2^4 \cdot (x^2)^4 \cdot y^4}{(w^3)^4} = \frac{16 \cdot x^8 \cdot y^4}{w^{12}}$$

Observación:

- Potencias de base negativa y exponente par da como resultado un valor positivo

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

- Potencias de base negativa y exponente impar da como resultado un valor negativo

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

El diámetro de un átomo de hidrógeno es aproximadamente igual a 0,0000000001 metros y su masa es aproximadamente igual a 0,0000000000000000000000000017 kg.

Resulta más que necesario para la ciencia poder expresar estos números de un modo más sencillo. ¿Cómo lo harían?

NOTACIÓN CIENTÍFICA

La notación científica consiste en escribir un número a partir de un producto entre otros dos números, uno llamado coeficiente y el otro, potencia de base 10, cuyo exponente es un número entero.

$$n° = C \cdot 10^p; \qquad donde \quad 1 < |C| < 10 \quad y \quad p \in \mathbb{Z}$$

EJEMPLO

$$23.500.000.000 = 2{,}35 \cdot 10.000.000.000 = 2{,}35 \cdot 10^{10}$$

$$0{,}000076 = 7{,}6 \cdot 10^{-5}$$

$$420.000.000.000 \cdot 0{,}000004 = 4{,}2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-6} = 16{,}8 \cdot 10^{5} = 1{,}68 \cdot 10^{6}$$

¿Por qué los números muy grandes se expresan en potencia de base 10 con exponente postivo y los números demasiados pequeños, con potencia de base 10 de exponente negativo?

REGLA PRÁCTICA

Para expresar un número en notación científica ($n° = C \cdot 10^p$) se obtiene:

- El primer factor colocando la coma inmediatamente después del primer dígito distinto de cero de la izquierda (C).
- El segundo factor que es una potencia de 10 (10^p). Para obtener el exponente, se cuenta el número de dígitos que tienen que saltarse para mover la coma de su nueva posición a la original. Si el movimiento es hacia la derecha, el exponente es positivo; si el movimiento es hacia la izquierda, el exponente es negativo. Verifiquen esta regla con el ejemplo antes resuelto.

¿Tiene $\sqrt{4}$ una única solución?
¿Es $\sqrt{4} = 2$ ó $\sqrt{4} = -2$?
¿O ambos son resultados posibles?

RADICACIÓN DE NÚMEROS REALES

La operación de radicación es una de las operaciones inversas de la potenciación. Es la operación inversa si lo que se desconoce es la base.

$$a^n = b \Leftrightarrow \sqrt[n]{b} = a$$

- b es el radicando
- n se denomina índice
- a es la raíz enésima
- $\sqrt{\ }$ se denomina radical

EJEMPLOS

- $\sqrt{9} = \pm 3$ ya que $3^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$
- $\sqrt[3]{27} = 3$ ya que $3^3 = 27$
- $\sqrt[5]{-32} = -2$ ya que $(-2)^5 = -32$
- $\sqrt{-4} = \nexists$ ya que no existe un número racional (ni real)

  que elevado a potencia par de negativo

Observación:

- Toda raíz de índice par y radicando positivo tiene dos soluciones: un resultado positivo (raíz principal) y uno negativo.
- Toda raíz de índice impar y radicando positivo tiene una solución (un número positivo).
- Toda raíz de índice impar y radicando negativo tiene una solución (un número negativo).

PROPIEDADES

Sean $a, b, \in, \mathbb{R}, y, n, \in, \mathbb{Z}$, se cumple:

PROPIEDAD	EN SÍMBOLOS	EJEMPLO
DISTRIBUTIVA CON RESPECTO A LA MULTIPLICACIÓN	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{27 \cdot 125} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{125} = 3 \cdot 5 = 15$
DISTRIBUTIVA CON RESPECTO A LA DIVISIÓN	$\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}, \quad b \neq 0$	$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$
RAIZ DE RAIZ	$\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[q \cdot n]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$

EXPONENTE FRACCIONARIO

La radicación puede expresarse como una potencia de exponente fraccionario:

$$\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p = a^{\frac{p}{n}}$$

EJEMPLO

$$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} \qquad 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 \qquad \sqrt[5]{\left(\sqrt[6]{\pi^5}\right)^3} = \left(\pi^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{3}{5}} = \pi^{\frac{5}{6}\frac{3}{5}} = \pi^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$$

EJEMPLO

$$(4)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{16} = 2 \qquad (-4)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{16} = 2$$

EN AMBOS CASOS, 2 ES LA RAÍZ PRINCIPAL

Si p y n son iguales se cumple: $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{Si } n \text{ es impar} \\ |a| & \text{Si } n \text{ es par} \end{cases}$

SIMPLIFICACIÓN

Un caso particular de la simplificación de raíces es la estudiada anteriormente:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{si } n \text{ es impar} \\ |a| & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

De manera general, podemos decir que es posible simplificar el índice de la raíz y el exponente del radicando sin alterar el resultado, si ambos se pueden dividir por un mismo número.

Para simplificar un radical dividimos el índice y el exponente del radical por el máximo común divisor de los dos. Lo que obtenemos es un radical EQUIVALENTE.

$$\sqrt[n:q]{a^{p:q}} = \sqrt[n]{a^p}, \quad con\; q \neq 0$$

EJEMPLOS

$$\sqrt[3]{2^{12}} = \sqrt[3\cdot 1]{2^{3\cdot 4}} = 2^4$$

$$\sqrt[15]{x^{10}\cdot y^5} = \sqrt[3\cdot 5]{x^{2\cdot 5}\cdot y^{1\cdot 5}} = \sqrt[3]{x^2\cdot y}$$

Observación:

Radicales equivalentes se pueden obtener al dividir por un mismo número (distinto de cero) indice y exponente, como así también multiplicar por un mismo número.

$$\sqrt[n\cdot q]{a^{p\cdot q}} = \sqrt[n]{a^p}$$

Para multiplicar o dividir radicales, éstos deben ser equivalentes.

EJEMPLO

Al resolver $\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt{10}$, debemos establecer radicales equivalentes para poder realizar la operación, ya que poseen distintos índices. Para ello buscamos el mínimo común múltiplo entre los índices:

$$\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt{10} = \sqrt[3\cdot 2]{10^2}\cdot\sqrt[2\cdot 3]{10^3} = \sqrt[6]{10^2}\cdot\sqrt[6]{10^3} = \sqrt[6]{10^2\cdot 10^3} = \sqrt[6]{10^5}$$

¿Es su mínima expresión?

EXTRACCIÓN DE FACTORES DEL RADICAL

Una aplicación de la simplificación de radicales es la extracción de factores del radical.

Para simplificar radicales a su más simple expresión se descompone en sus factores primos.

Analicemos un ejemplo: Extraer factores de $\sqrt{32}$ y de $\sqrt[3]{x^7 \cdot y^5}$

EJEMPLO

Factorizamos el 32

$$\sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt{2^4 \cdot 2} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{2} = 2^2 \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2}$$

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

Otra manera:

$$\sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2}$$

EJEMPLO

Les proponemos extraer factores de $\sqrt{540}$

$$\sqrt[3]{x^7 \cdot y^5} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x^3 \cdot x \cdot y^3 \cdot y^2} = \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y^3} \cdot \sqrt[3]{y^2} =$$
$$x \cdot x \sqrt[3]{x} \cdot y \cdot \sqrt[3]{y^2} = x^2 \cdot y \cdot \sqrt[3]{xy^2}$$

Otra manera:

$$\sqrt[3]{x^7 \cdot y^5} = \sqrt[3]{x^6 \cdot x \cdot y^3 \cdot y^2} = \sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y^3} \cdot \sqrt[3]{y^2} = x^2 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot y \cdot \sqrt[3]{y^2} = x^2 \cdot y \cdot \sqrt[3]{xy^2}$$

OPERACIONES CON RADICALES

MULTIPLICACIÓN

Para multiplicar radicales se debe aplicar la propiedad distributiva de la radicación con respecto al producto. Es decir, para multiplicar dos o más radicales, se debe tener el mismo índice y multiplicar los radicandos.

EJEMPLO

$$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{75} = \sqrt[3]{5 \cdot 75} = \sqrt[3]{375} \underbrace{=}_{\substack{extrayendo \\ factores \\ del \\ radical}} 5 \cdot \sqrt[3]{3}$$

DIVISIÓN

Para dividir radicales se debe aplicar la propiedad distributiva de la radicación con respecto al cociente. Es decir, para dividir dos radicales, se debe tener el mismo índice y dividir los radicandos.

EJEMPLO

$$\sqrt[3]{75} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{75 : 5} = \sqrt[3]{15}$$

Al resolver algunas divisiones, puede ocurrir que el resultado sea un número con denominador irracional.

RACIONALIZACIÓN

Racionalizar consiste en eliminar los radicales del denominador de una fracción. Para lograr esto, se multiplican los dos componentes del cociente por una expresión que contenga el radical por eliminar y que cumpla que, al multiplicarse, el denominador resulte una expresión racional.

Podemos encontrar diferentes casos:

- El denominador está compuesto por un solo término con raíz. Se pueden diferenciar en:
  Su radicando es un solo factor. EJEMPLO: $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$

  Su radicando tiene varios factores. EJEMPLO: $\frac{3}{\sqrt[3]{a^2 \cdot b}}$

Si se tiene un radical con índice mayor que 2 de la forma $\sqrt[n]{a^p}$ $(n > p)$, se multiplica numerador y denominador por un radical de la forma $\sqrt[n]{a^{n-p}}$, para seguir operando y simplificando hasta obtener un denominador racional.

EJEMPLOS

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \cdot \overbrace{\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}}}^{=1} \underbrace{=}_{\substack{\text{multiplicación}\\ \text{de radicales}}} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} \underbrace{=}_{\text{simplificando}} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{5} = \frac{2}{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}$$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{a^2 \cdot b}} = \frac{3}{\sqrt[3]{a^2 \cdot b}} \cdot \overbrace{\frac{\sqrt[3]{a \cdot b^2}}{\sqrt[3]{a \cdot b^2}}}^{=1} \underbrace{=}_{\substack{\text{multiplicación}\\ \text{de radicales}}} \frac{3 \cdot \sqrt[3]{a \cdot b^2}}{\sqrt[3]{a^3 \cdot b^3}} \underbrace{=}_{\text{simplificando}} \frac{3 \cdot \sqrt[3]{a \cdot b^2}}{a \cdot b}$$

- El denominador está compuesto por dos términos, en los cuales uno o los dos están afectados por raíces cuadradas. EJEMPLO: $\frac{6}{\sqrt{7}-2}$.

Para racionalizar, en este caso, debemos aplicar el producto de conjugados.

EJEMPLO

$$\frac{6}{\sqrt{7}-2} = \frac{6}{\sqrt{7}-2}\cdot \frac{\overbrace{\sqrt{7}+2}^{\substack{\text{conjugado del}\\ \text{denominador}}}}{\sqrt{7}+2} \underbrace{=}_{\substack{\text{multiplicación}\\ \text{de radicales}}} \frac{6\cdot(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7})^2-2^2} \underbrace{=}_{\text{simplificando}} \frac{6\cdot(\sqrt{7}+2)}{7-4} = \frac{6\cdot(\sqrt{7}+2)}{3} = 2\cdot(\sqrt{7}+2)$$

Diferencia de cuadrados
Recordemos que el producto de la suma de dos números por la diferencia de esos mismos es igual a la diferencia de sus cuadrados.

En símbolos:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

SUMA Y RESTA

Radicales semejantes son aquellos que tienen igual radicando y el mismo índice, es decir, sólo difieren por el coeficiente: $\sqrt[3]{5}$ y $8\sqrt[3]{5}$ son semejantes.

Así, dos o más radicales pueden sumarse o restarse si son radicales semejantes.

EJEMPLO

$$2\cdot\sqrt{3} + \frac{3}{2}\cdot\sqrt{3} = \left(2+\frac{3}{2}\right)\cdot\sqrt{3} = \frac{7}{2}\cdot\sqrt{3}$$

En algunos casos, cuando los radicales no son semejantes, pueden transformarse en semejantes al aplicar el concepto de extracción de factores del radical.

EJEMPLO

$$8 \cdot \sqrt{50} - 2\sqrt{98} - 12\sqrt{2}$$

Factorizado los números 50 y 98:

$$\begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 98 & 2 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 8 \cdot \sqrt{50} - 2 \cdot \sqrt{98} - 12 \cdot \sqrt{2} &= 8 \cdot \sqrt{5^2 \cdot 2} - 2 \cdot \sqrt{7^2 \cdot 2} - 12 \cdot \sqrt{2} \\ &= 8 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot 7 \cdot \sqrt{2} - 12\sqrt{2} \\ &= 40 \cdot \sqrt{2} - 14 \cdot \sqrt{2} - 12\sqrt{2} \\ &= (40 - 14 - 12) \cdot \sqrt{2} \\ &= 14 \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

Si la Hidra de Lerna tiene 32 cabezas, ¿cuántos cortes realizó el héroe?
¿En cuántos cortes la hidra tendrá 1024 cabezas?

LOGARITMACIÓN

En matemáticas, el *logaritmo* de un número, en una base determinada, es el exponente al cual hay que elevar la base para obtener dicho número.

$$log_b\, a = c \Leftrightarrow b^c = a \quad \} Logaritmo\ por\ definición$$

El logaritmo es una de las operaciones inversas de la potenciación, si lo que se desconoce es el exponente.

La base b debe ser mayor que cero y distinta de 1. En símbolos, $b > 0$ y $b \neq 1$.
En tanto, el argumento, denotado como a, debe ser mayor a cero.
En símbolos, $a > 0$.
El resultado del logaritmo puede ser cualquier número real, por ser el valor de un exponente.

EJEMPLOS

$$log_2 16 = 4 \Leftrightarrow 2^4 = 16$$

$$log_5 125 = 3 \Leftrightarrow 5^3 = 125$$

$$log_{\frac{1}{2}} 4 = -2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

$$log_7 1 = 0 \Leftrightarrow 7^0 = 1$$

LOGARITMOS DECIMALES Y NATURALES

Se llaman *logaritmos decimales* a aquellos que tienen por base el número 10. Al ser muy habituales, es frecuente no escribir la base.

$$log_{10} a = log\ a$$

Se llaman *logaritmos naturales* o neperianos a los logaritmos que tienen por base el número e.

$$log_e a = ln\ a$$

Los invitamos a ver en youtube los videos:

- Logaritmos explicados, de Steve Kelly
- ¿Cómo guían las matemáticas nuestros barcos en alta mar?, de George Christoph

PROPIEDADES

PROPIEDAD	EN SÍMBOLOS	EJEMPLO
DEL PRODUCTO	$log_b(a \cdot d) = log_b a + log_b d$	$log_2(16 \cdot 64) = log_2 16 + log_2 64 = 4 + 6 = 10$
DE LA DIVISION	$log_b(a : d) = log_b a - log_b d$	$log_3(81 : 3) = log_3 81 - log_3 3 = 4 - 1 = 3$
DE LA POTENCIA	$log_b a^p = p \cdot log_b a$	$log_4 16^5 = 5 \cdot log_4 16 = 5 \cdot 2 = 10$
DE LA RAIZ	$log_b \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot log_b a$	$log_3 \sqrt[4]{27} = \frac{1}{4} \cdot log_3 27 = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$
NULO	$log_b 1 = 0$	
IDENTIDAD	$log_b b = 1$	
PROPIEDAD FUNDAMENTAL	$b^{log_b a} = a$	

Pero si sólo en la calculadora se pueden calcular logaritmos
De base 10 o e, ¿cómo podemos calcular logaritmos en diferentes bases?

CAMBIO DE BASE

Para lograr calcular logaritmos con base distinta de 10 o e en la calculadora, debemos aplicar un cambio de base. El cual se define de la siguiente manera:

$$log_b\, a = \frac{log\, a}{log\, b} = \frac{ln\, a}{ln\, b}$$

El cambio de base también se aplica para cualquier tipo de base:

$$log_b\, a = \frac{log_q\, a}{log_q\, b}$$

EJEMPLO

$$log_7 35 = \frac{log\, 35}{log\, 7} \cong \frac{1{,}544}{0{,}845} \cong 1{,}827$$

$$log_7 35 = \frac{ln\, 35}{ln\, 7} \cong \frac{3{,}555}{1{,}946} \cong 1{,}827$$

Las siguientes expresiones son utilizadas en la vida cotidiana:

- “Debo responder correctamente al menos 6 de 10 preguntas para aprobar”.
- “Puedo faltar como máximo dos clases a la cursada”
- “Los valores normales de glóbulos rojos son $4.500.000$-$5.900.000/Ml$ en varones y $4.000.000$-$5.200.000/Ml$ en mujeres

Expresarlas en lenguaje matemático. ¿Qué concepto matemático utilizarías?

DESIGUALDAD. INTERVALOS Y RECTA NUMÉRICA

Una desigualdad se establece por cualquiera de los siguientes símbolos:

$$\begin{cases} \text{"mayor que" } (>) \\ \text{"menor que" } (<) \\ \text{"mayor o igual que" } (\geq) \\ \text{"menor o igual que" } (\leq) \end{cases}$$

EJEMPLO

DESIGUALDAD	EJEMPLO
$\boldsymbol{a > b}$ $(\boldsymbol{a\ es\ mayor\ que\ b})$	$-3 > -5$
$\boldsymbol{a < b}$ $(\boldsymbol{a\ es\ menor\ que\ b})$	$-2 < 7$
$\boldsymbol{a \geq b}$ $(\boldsymbol{a\ es\ mayor\ o\ igual\ que\ b})$	$15 \geq \sqrt{10}$
$\boldsymbol{a \leq b}$ $(\boldsymbol{a\ es\ menor\ o\ igual\ que\ b})$	$\frac{10}{7} \leq 15$

EJEMPLOS

- Si representa las respuestas correctas, la proposición se puede representar de la siguiente manera:

$$6 \leq x \leq 10$$

- Si representa la cantidad de clases que se pueden faltar, se representa de la siguiente manera:

$$0 \leq x \leq 2$$

- Si representa la cantidad de glóbulos rojos, se puede representar:

  Hombres: $4500000 < x < 5900000$
  Mujeres: $4000000 < x < 5200000$

INTERVALOS EN LA RECTA NUMÉRICA

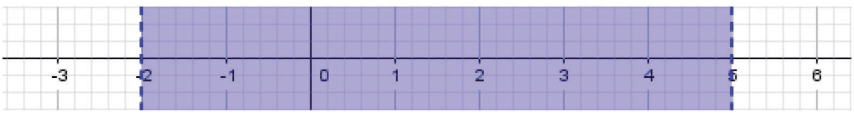
Un intervalo es un conjunto de números reales que se corresponden con los puntos de un segmento o una semirrecta en la recta real.

Según incluyan o no a los puntos extremos, los intervalos pueden ser abiertos, semiabiertos o cerrados.

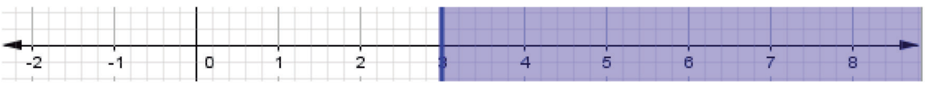
NOMBRE	INTERVALO	SIGNIFICADO	RECTA
INTERVALO ABIERTO	$(a;b)$	Números comprendidos entre a y b	
INTERVALO CERRADO	$[a;b]$	Números comprendidos entre a y b, ambos incluidos	
INTERVALO SEMIABIERTO	$(a;b]$	Números entre a y b, incluido b	
	$[a;b)$	Números entre a y b, incluido a	
SEMIRRECTA	$(-\infty;a)$	Números menores que a	
	$(a;+\infty)$	Números mayores que a	
	$(-\infty;a]$	Números menores o iguales que a	
	$[a;+\infty)$	Números mayores o iguales que a	

EJEMPLOS

El intervalo abierto $(-2;5)$ es el conjunto de todos los números mayores a -2 pero menores que 5.
Dicho intervalo puede expresarse por medio de una desigualdad: $-2 < x < 5$
Incluso podemos representarlo en la recta numérica:



Una semirrecta $[3;\infty)$ es el conjunto de todos los números mayores o iguales a 3.
Dicho intervalo puede expresarse por medio de una desigualdad: $3 \leq x$
Incluso podemos representarlo en la recta numérica:



CAPÍTULO 2

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una **expresión algebraica** es una combinación de números o letras (llamadas *variables o indeterminadas)* relacionadas entre sí por operaciones matemáticas.

EJEMPLO

$5x^2 + 2$

$x^2 - 3x + 2x^{-3}$

$\frac{6}{x} - 4$

$\frac{1}{3}\sqrt{x} + 5x - x^5 + \frac{2}{5}x^2 + 8$

¿Podrían decir si las expresiones anteriores son polinomios?

Las expresiones algebraicas se denominan **polinomios** si son expresiones *enteras,* es decir, aquellas expresiones en las que la indeterminada no se encuentra dividiendo ni afectada por exponentes negativos o racionales.
Los polinomios que estudiamos en este curso dependen de una sola variable representada generalmente por la letra x y sus coeficientes son números reales.
La expresión general que los caracteriza es:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0.$$

Donde:
- a_n ; a_{n-1}; $\ldots a_1$; a_0 son números reales llamados *coeficientes*,
- n; $n - 1$; $\ldots$; 1 son los exponentes enteros positivos.
- Si $a_n \neq 0$, decimos que el polinomio tiene *grado* n *y* a_n y es el *coeficiente principal*.
- El coeficiente a_0 recibe el nombre de *término independiente*.

El polinomio $P(x) = 2x^5 + 3x^4 - 5x - 1$, es de grado ...., con coeficiente principal igual a .... y su término independiente es ....

¿Qué pasaría si todos los coeficientes de un polinomio son ceros?

RELEYENDO LA DEFINICIÓN, ¿PODRÍAN DECIDIR SI LAS SIGUIENTES EXPRESIONES SON O NO POLINOMIOS?

$P(x) = 3x^2 + 2x^4 - 3$

$Q(x) = -x + \dfrac{2}{5}$

$R(x) = 4x^5$

$S(x) = 3x - 2x^{-4} + 5x^{-2} - 7x^3$

$T(x) = \dfrac{3}{4}$

$U(x) = 2x^{\frac{2}{3}} - 3x^6 + \dfrac{1}{2}x^4 - 5x^3$

¿EN QUÉ SE DIFERENCIAN LAS EXPRESIONES ANTERIORES?

Notando las diferencias de cada uno de ellos, podemos definir:

- **Monomio:** Polinomio de un solo término.
- **Binomio:** Polinomio de dos términos.
- **Trinomio:** Polinomio de tres términos.
- **Cuatrinomio:** Polinomio de cuatro términos.

De aquí en más, se llaman ***polinomios de*** "$\boldsymbol{k}$" términos, donde k es la cantidad de términos que lo componen.

Identifiquen si los polinomios anteriores son monomios, binomios, trinomios, etc.

¿RECUERDAN CUÁNDO UN POLINOMIO ESTÁ ORDENADO Y COMPLETO?

Un polinomio está ***ordenado*** cuando los monomios que lo componen están escritos en forma creciente o decreciente según sus grados. Para estudiarlos utilizaremos la forma decreciente.

En los polinomios anteriores, ¿El polinomio $P(x)$ está ordenado? Si no es así, ¿cómo harías para ordenarlo?

Por último, un polinomio está ***completo*** cuando tiene todos los términos, desde el término de mayor grado hasta el término independiente; esto se cumple cuando todos los coeficientes son distintos de cero. ¿Cómo se puede completar un polinomio incompleto?

¿Cuánto vale $P(x) = -x^3 + 6x + 5$ si x vale 3?

En general, ¿cuánto vale $P(x)$ si x vale a?

ESPECIALIZACIÓN DE UN POLINOMIO

En un polinomio $P\ (x)$, x es la variable o indeterminada. Cuando le asignamos a x un valor determinado, decimos que el polinomio $P(x)$ está *especializado* en ese valor y el resultado es un valor numérico.

EJEMPLOS

1. Si consideramos $P(x) = -x^5 + 2x^3 + x^2 - 3x$, $P(x)$ especializado en $x = 2$ resulta:

$$P(2) = -2^5 + 2.2^3 + 2^2 - 3.2 = -18$$

¿Cuál será el valor numérico que resulte de especializarlo en $x = -1$? ¿Y en $x = 0$? ¿Pueden proponer otros valores para especializarlo?

Si la especialización en a del polinomio $P(x) = 2x^3 - 4$ arroja el valor numérico 50, ¿cuál es el valor de a?

2. Si consideramos $P(x) = x^2 - 9$, $P\ (x)$ especializado en $x = -3$ resulta:

$$P\ (-3) = (-3)^2 - 9$$
$$P\ (-3) = 0$$

Si al especializar un polinomio obtenemos como resultado cero, el valor asignado a la variable se llama *raíz* del polinomio. Entonces:

a es raíz de $P(x)$ si y sólo si $P(a) = 0$

¿Cómo harían para sumar los siguientes polinomios $P(x)$ y $Q(x)$?

$P(x) = 4x^4 + 6x^2 - 3x + 2$ $\qquad$ $Q(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x + 1$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

SUMA O ADICIÓN DE POLINOMIOS

Para sumar dos o más polinomios, se deben sumar los coeficientes de los términos semejantes, es decir, aquellos que tienen el mismo grado. Por esto decimos que la suma de polinomios se realiza "término a término".

EJEMPLO

Sean $P(x) = 4x^4 + 6x^2 - 3x + 2$ y $Q(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x + 1$

$P(x) + Q(x) = 4x^4 + 6x^2 - 3x + 2 \quad + \quad 3x^4 - 7x^3 + 2x + 1$

Se asocian los términos de igual grado y resulta:

$P(x) + Q(x) = 7x^4 - 7x^3 + 6x^2 - x + 3$

Otra forma de sumar es completando cada uno de los polinomios y luego disponerlos uno de debajo de otro encolumnando los términos del mismo grado

$$P(x) + Q(x) = \begin{array}{r} 4x^4 + 0x^3 + 6x^2 - 3x + 2 \\ +\ 3x^4 - 7x^3 + 0x^2 + 2x + 1 \\ \hline 7x^4 - 7x^3 + 6x^2 - x + 3 \end{array}$$

¿Siempre se cumplirá que la suma de dos polinomios del mismo grado es otro polinomio del mismo grado?

Si la suma de dos polinomios es igual al polinomio nulo, se cumple que los coeficientes de los términos de igual grado que los constituyen son números opuestos y los polinomios se llaman **polinomios opuestos**. Al opuesto de $P(x)$ se lo indica $-P(x)$.

Por ejemplo el opuesto de

$P(x) = -3x^5 + 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x$ es $-P(x) = 3x^5 - 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x$

Las mismas propiedades que se cumplen en la adición de números reales (cuadro de pág. 16 del capítulo 1), se cumplen en la adición de polinomios. Esta analogía se repetirá con las operaciones de resta, multiplicación y división.

¿Cómo harían para restar los siguientes polinomios $P(x)$ y $Q(x)$?

$P(x) = 5x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1$ $\qquad Q(x) = 5x^3 + 6x^2 - 4x$

RESTA O SUSTRACCIÓN DE POLINOMIOS

Para restar dos polinomios, se suma el opuesto del sustraendo. Es decir, para efectuar $P(x) - Q(x)$, debemos sumar a $P(x)$ el opuesto de $Q(x)$, entonces $P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)]$.

EJEMPLO

Sean $P(x) = 5x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1$ $\qquad Q(x) = 5x^3 + 6x^2 - 4x$

Para calcular $P(x) - Q(x)$, encontremos el opuesto de $Q(x)$.
Luego $-Q(x) = -5x^3 - 6x^2 + 4x$.
Entonces,
$P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)] = 5x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1 + (-5x^3 - 6x^2 + 4x)$

Asociando los términos de igual grado:

$P(x) - Q(x) = 5x^3 - 5x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x^2 + 3x + 4x - 1$

Agrupándolos con las operaciones correspondientes:

$$P(x) - Q(x) = 0x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 7x - 1$$

Lo que es equivalente al polinomio $-\frac{15}{2}x^2 + 7x - 1$.

Si la resta de dos polinomios es igual al polinomio nulo, dichos polinomios son iguales.

¿Cómo harían para multiplicar los siguientes polinomios $P(x)$ y $Q(x)$?
$P(x) = 5x^3 + 4$ $\qquad Q(x) = 3x^3 + 5x - 2$

MULTIPLICACIÓN O PRODUCTO DE POLINOMIOS

¿RECUERDAN LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA?
Para multiplicar dos polinomios, aplicamos reiteradamente esta propiedad del producto respecto de la suma y de la resta, luego agrupamos los términos de igual grado y así reducimos la expresión. Cabe mencionar que al multiplicar dos polinomios se obtiene otro polinomio; ¿cuál será el grado del polinomio resultante?

¿En la multiplicación $P(x) \cdot Q(x)$ son necesarios los paréntesis en $P(x)$ y en $Q(x)$?

EJEMPLO

Sean $P(x) = 5x^3 + 4$ y $Q(x) = 3x^3 + 5x - 2$

Para hallar $P(x) \cdot Q(x) = (5x^3 + 4) \cdot (3x^3 + 5x - 2)$

Aplicamos la propiedad distributiva término a término:

$$= 5x^3 \cdot (3x^3 + 5x - 2) + 4 \cdot (3x^3 + 5x - 2)$$

$$= 15x^6 + 25x^4 - 10x^3 + 12x^3 + 20x - 8$$

Agrupando los términos semejantes $P(x) \cdot Q(x) = 15x^6 + 25x^4 + 2x^3 + 20x - 8$

DIVISIÓN O COCIENTE DE POLINOMIOS

Para dividir dos polinomios hace falta que recordemos las divisiones enteras con números.

$$\begin{array}{c|l} \textit{Dividendo} & \underline{\textit{Divisor}} \\ \textit{Resto} & \textit{Cociente} \end{array}$$

¿Recuerdan en qué condiciones podemos dividir dos números naturales?

En la división de polinomios mantenemos el procedimiento, pero en este caso operamos con polinomios.
En una división de polinomios:

$$\begin{array}{c|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & C(x) \end{array}$$

$P(x)$ es el dividendo, $Q(x)$ el divisor, $C(x)$ el cociente, $R(x)$ el resto y se cumple que:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

dividendo = divisor · cociente + resto

EJEMPLO

En principio, dividimos el primer término del dividendo por el primer término del divisor, obteniendo así el primer término del cociente y el primer resto parcial.

$$\begin{array}{rl} 7x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 0x + 8 & \lfloor 3x^2 + 5x - 2 \\ -\quad \underline{7x^4 + \frac{35}{3}x^3 - \frac{14}{3}x^2} & \frac{7}{3}x^2 \\ \underbrace{-\frac{20}{3}x^3 + \frac{32}{3}x^2 + 0x + 8}_{\textit{Resto parcial}} & \end{array}$$

Luego continuamos con el mismo procedimiento a partir del resto parcial obtenido, encontrando así el segundo término del cociente.

$$\begin{array}{rl}
\mathbf{7x^4+5x^3+6x^2}+0x+8 & \underline{\lfloor \mathbf{3x^2+5x-2}} \\
-\ \underline{7x^4+\frac{35}{3}x^3-\frac{14}{3}x^2} & \frac{7}{3}x^2-\frac{20}{9}x \\
-\frac{20}{3}x^3+\frac{32}{3}x^2+0x+8 & \\
-\ \underline{-\frac{20}{3}x^3-\frac{100}{9}x^2+\frac{40}{9}x} & \\
\underbrace{0+\frac{196}{9}x^2-\frac{40}{9}x+8}_{Resto\ parcial} &
\end{array}$$

En este punto debemos preguntarnos si continuamos la división. En la división de números naturales, terminamos la “cuenta” cuando el resto es menor que el divisor. En polinomios, miramos los grados. Cuando el **polinomio resto tenga grado menor al divisor, finaliza la operación.** En este caso, ambos tienen grado dos por lo que debemos continuar dividiendo.

$$\begin{array}{rl}
\mathbf{7x^4+5x^3+6x^2}+0x+8 & \underline{\lfloor \mathbf{3x^2+5x-2}} \\
-\ \underline{7x^4+\frac{35}{3}x^3-\frac{14}{3}x^2} & \underbrace{\frac{7}{3}x^2-\frac{20}{9}x+\frac{196}{27}}_{Cociente\ C(x)} \\
-\frac{20}{3}x^3+\frac{32}{3}x^2+0x+8 & \\
-\ \underline{-\frac{20}{3}x^3-\frac{100}{9}x^2+\frac{40}{9}x} & \\
0+\frac{196}{9}x^2-\frac{40}{9}x+8 & \\
-\ \underline{\frac{196}{9}x^2+\frac{980}{27}x-\frac{392}{27}} & \\
\underbrace{-\frac{1100}{27}x+\frac{608}{27}}_{Resto\ R(x)} &
\end{array}$$

¡Ahora sí terminamos la división! Porque el grado del resto es uno, menor que el grado del divisor que es dos.

¿Habrá una forma más sencilla de realizar divisiones entre polinomios?

¡La respuesta es sí! La regla de Ruffini, pero... tiene ciertas condiciones.

¿Recuerdan cuáles son esas condiciones?

REGLA DE RUFFINI

La regla de Ruffini permite dividir un polinomio $P(x)$ por otro polinomio $Q(x)$ mónico y de grado uno.
Es una forma práctica para dividir cualquier polinomio por un binomio de la forma "$x - a$" siendo a un número real.

Un polinomio es mónico si su coeficiente principal es uno.

¿Cómo sería el grado del polinomio cociente? ¿Por qué?

EJEMPLO

Si tenemos que dividir $P(x) = 2x^4 + 3x^2 - 3$ por $Q(x) = x - 3$, podemos utilizar esta regla porque el polinomio divisor $Q(x)$ tiene la forma $x - a$.
Organizamos los coeficientes de esta manera:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\hspace{6cm}}^{\text{Coeficientes de } P(x) \text{ completo y ordenado}}} \\
 & 2 & 0 & 3 & 0 & -3 \\
\overbrace{3}^{a} & & \overset{+}{6} & 18 & 63 & \\
 & & & & & 189 \\
\hline
\times & \underbrace{2}_{\text{Coeficiente principal de} P(x)} & 6 & 21 & 63 & \underbrace{186}_{Resto}
\end{array}$$

Luego el cociente $C(x)$ se construye con los valores obtenidos como coeficientes y su grado es uno menos que el de $P(x)$:
$C(x) = 2x^3 + 6x^2 + 21x + 63$ y el último valor corresponde al *Resto* $= 186$.

¿Podríamos verificar que dicha división es correcta? ¿Cómo?

En el siguiente esquema, mostramos en paralelo la división tradicional de polinomios y la división con la REGLA DE RUFFINI.

División tradicional		División por Regla de Ruffini
$3x^3 + 7x^2 + 6x - 1$ $\underline{3x^3 + 6x^2}$ $x^2 + 6x - 1$ $\underline{x^2 + 2x}$ $4x - 1$ $\underline{4x + 8}$ $\underbrace{-9}_{R(x)}$	$\lfloor x + 2$ $\underbrace{3x^2 + x + 4}_{Cociente\ C(x)}$	$\begin{array}{c\|cccc} & 3 & 7 & 6 & -1 \\ -2 & & -6 & -2 & -8 \\ \hline & 3 & 1 & 4 & \underbrace{-9}_{Resto} \end{array}$ 3, 1 y 4 corresponden a los coeficientes del cociente. Luego $C(x) = 3x^2 + x + 4$

TEOREMA DEL RESTO

Este teorema nos aporta una herramienta muy útil para el caso particular en que realizamos la división de un polinomio $P(x)$ por otro de la forma $x - a$, donde a es un número real.

Considerando que **dividendo = divisor · cociente + resto**, en estas divisiones podemos reemplazar $Q(x)$ por $(x - a)$:

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x) + R(x)$$

Especializando el polinomio $P(x)$ en $x = a$ en resulta

$$P(a) = \underbrace{(a - a)}_{0} \cdot C(a) + R(a) \quad \Rightarrow \quad P(a) = R(a)$$

Este resultado permite conocer el resto de una división sin realizar la operación, simplemente especializando el polinomio dividendo en el valor a.

> Teorema del Resto: Al dividir un polinomio $P(x)$ por otro de la forma $x - a$, se obtiene como resto un número que es igual a $P(a)$.

EJEMPLO

Siguiendo el ejemplo anterior, tenemos que $P(x) = 3x^3 + 7x^2 + 6x - 1$ y $Q(x) = x + 2$. Para que el divisor sea de la forma $x - a$, $Q(x)$ puede escribirse como $x - (-2)$, entonces $a = -2$.

El resto, según el teorema anterior, puede hallarse calculando $P(a)$.

Entonces, $P(-2) = 3 \cdot (-2)^3 + 7 \cdot (-2)^2 + 6 \cdot (-2) - 1 = -9$, coincide con el resto hallado en la división.

SIN REALIZAR LA DIVISIÓN, ¿PUEDEN CALCULAR LOS SIGUIENTES RESTOS?

Polinomio dividendo	Polinomio divisor	Resto
$\boldsymbol{S(x) = 7x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 8}$	$T(x) = x - 2$	
$\boldsymbol{Q(x) = 3x^2 + 5x - 2}$	$U(x) = x + 3$	
$\boldsymbol{P(x) = 5x^3 + 4}$	$V(x) = -2x + 8$	

¿SE PUEDE APLICAR EL TEOREMA DEL RESTO CON EL DIVISOR $V(x)$?

¿CÓMO DIVIDIR CUANDO EL POLINOMIO DIVISOR ES UN BINOMIO PERO NO ES MÓNICO?

Recordemos que para aplicar la REGLA DE RUFFINI el polinomio divisor debe ser un binomio de grado uno y mónico. Cuando la última condición no se cumple, podemos dividir ambos polinomios, dividendo y divisor, por el coeficiente principal del divisor. Pero tengamos en cuenta que:

Si en una división se dividen el dividendo y el divisor por un mismo número, se obtiene el **mismo cociente** pero el *resto* queda *dividido* por dicho número.

EJEMPLO

Si queremos hacer el cociente entre $P(x) = 5x^3 + 4$ y $V(x) = -2x + 8$, dividimos por -2 a $V(x)$ para transformarlo en mónico y también a $P(x)$ para que el cociente sea el mismo.

$$\text{Luego } \frac{P(x)}{-2} = -\frac{5}{2}x^3 - 2 \quad \text{y} \quad \frac{V(x)}{-2} = x - 4.$$

Como ahora $x - 4$ es mónico realizamos la división por Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & -2 \\ 4 & & -10 & -40 & -160 \\ \hline & -\frac{5}{2} & -10 & -40 & \underbrace{-162}_{R'} \end{array}$$

El cociente de $P(x)\colon V(x)$ es $C(x) = -\frac{5}{2}x^2 - 10x - 40$. El resto quedó dividido por -2, entonces:

$$R' = \frac{R}{-2} \Rightarrow R = -162.(-2) = 324$$

¿Qué podemos decir de a si el resto da 0, es decir, si $P(a) = 0$?
Y en ese caso, ¿qué relación existe entre el dividendo $P(x)$ y el divisor $x - a$?

DIVISIBILIDAD DE POLINOMIOS

Para hallar divisores, cuando trabajamos con números, utilizamos los criterios de divisibilidad, pero en polinomios, ¿cuándo un polinomio será divisor de otro?
Cuando realizamos la división entre $P(x)$ y $Q(x)$ y el resto que obtenemos es cero, decimos que $P(x)$ **es divisible por** $Q(x)$ y en tal caso, podemos expresar $P(x)=Q(x)\cdot C(x)$.
¿Cómo podemos averiguar si $P(x)$ es divisible por $(x - a)$ sin hacer la división?
Para que $P(x)$ sea divisible por $(x - a)$, el resto de la división debiera ser cero. Si usamos el TEOREMA DEL RESTO, especializando $P(x)$ en a, podemos calcular ese resto. Es decir, si $P(a) = 0$ (o a es raíz de P), entonces $P(x)$ es divisible por $(x - a)$.

Si a es raíz de un polinomio $P(x)$, entonces $P(x)$ **es divisible** por $x - a$.

¿Podríamos decir de manera equivalente que $Q(x)$ es divisor de $P(x)$ o que $P(x)$ es múltiplo de $Q(x)$?

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

El *teorema fundamental del álgebra (TFA)* afirma que *todo polinomio de grado $n \geq 1$, con coeficientes reales, puede descomponerse en un producto de factores de primer o segundo grado, también con coeficientes reales.*
Pero un polinomio puede tener raíces *reales* y raíces *no reales*. Por lo tanto, una consecuencia del teorema es:

Un polinomio de grado n tiene <u>como máximo</u> n raíces reales.

Las raíces no reales de un polinomio, siempre vienen de a par. Entonces, ¿es correcto decir que un polinomio de grado impar tendrá al menos una raíz real?

VEAMOS ALGUNOS EJEMPLOS DE CÓMO HALLAR RAÍCES DE POLINOMIOS DE DISTINTOS GRADOS.

EJEMPLOS

1. Sea $P(x) = -2x + 3$ para encontrar la raíz (la única porque tiene grado uno), debemos igualarlo a cero (revisar definición de raíz), y despejar el valor de x. En el ejemplo $-2x + 3 = 0 \quad \Longrightarrow x = \frac{3}{2}$ es la raíz buscada.

2. Sea $P(x) = x^2 + 3$ por TFA tendrá como máximo dos raíces reales, pero también puede pasar que no tenga ninguna. Igualamos a cero $x^2 + 3 = 0 \quad \Longrightarrow x = \pm\sqrt{-3}$ este resultado no pertenece al conjunto de los números reales, por lo tanto, no tiene raíces en $\mathbb{R}$.

En un polinomio $ax^2 + bx$, ¿es necesario aplicar la fórmula resolvente para hallar las raíces?

3. Sea $P(x) = -5x^2 + 15x + 20$ para hallar las raíces, $-5x^2 + 15x + 20 = 0$.

Para resolver esta ecuación conocemos la fórmula resolvente o de Bhaskara $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

En nuestro ejemplo $x_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4.(-5).20}}{2.(-5)} = \frac{-15 \pm \sqrt{625}}{-10} = \frac{-15 \pm 25}{-10}$

Entonces $x_1 = \frac{-15+25}{-10} = -1$ y $x_2 = \frac{-15-25}{-10} = 4$, tiene las dos raíces reales.

4. Sea $P(x) = x^3 + 125$ buscamos al menos una raíz real, igualando a cero.

$$x^3 + 125 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-125} = -5.$$

Hallamos una raíz $x = -5$, pero el polinomio es de grado tres, debe tener tres raíces. Entonces, *¿cómo establecemos las otras dos raíces?*
Si sabemos que $x = -5$ es raíz de $P(x)$, entonces $P(x)$ es divisible por el $x + 5$.
Utilizando la REGLA DE RUFFINI para dividir el polinomio:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & 125 \\ -5 & & -5 & 25 & -125 \\ \hline & 1 & -5 & 25 & \underbrace{0}_{Resto} \end{array}$$

Entonces $P(x) = (x+5) \cdot (x^2 - 5x + 25)$. ¿Cómo obtenemos ahora las otras dos raíces?

¿Cómo buscamos las raíces de polinomios de grado tres completos o de mayor grado?

MÉTODO DE GAUSS

Para poder encontrar, si existen, las *raíces racionales* de un polinomio de grado n (en general $n \geq 3$) con coeficientes enteros de la forma $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$, podemos utilizar el MÉTODO DE GAUSS, que consiste en:

- Tomar los valores del coeficiente principal a_n y del término independiente a_0
- Listar todos los divisores de ellos, por separado.
- Formar todas las combinaciones de $\frac{Divisores\ de\ a_0}{Divisores\ de\ a_n}$, que son las posibles raíces racionales.
- Aplicando el Teorema del Resto, podemos establecer cuál o cuáles de esos valores son raíces.
- Una vez obtenida una raíz a, podemos dividir por el polinomio $x - a$ con la REGLA DE RUFFINI, como se realizó en el ejemplo anterior.

EJEMPLO

Nos proponemos calcular las raíces del siguiente polinomio: $P(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$
Sabemos que $P(x)$, por ser de grado tres, tiene al menos una raíz real. La buscamos aplicando el TEOREMA DE GAUSS. Los divisores del coeficiente principal son: ± 1 y del término independiente: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.
Por lo tanto, $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ son posibles raíces racionales.
Aplicamos el TEOREMA DEL RESTO con esos valores y vemos que -1 es raíz pues $P(-1) = 0$. Por ende, $P(x)$ es divisible por $x + 1$. Aplicando la Regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 8 & 4 \\ -1 & & -1 & -4 & -4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \underbrace{0}_{Resto} \end{array}$$

Entonces $P(x) = (x + 1) \cdot (x^2 + 4x + 4)$
$P(x)$ es de grado tres, y por TFA puede tener como máximo tres raíces reales. Buscamos entonces las raíces de $x^2 + 4x + 4$.
Podemos hallarlas con fórmula resolvente, dado que se trata de un polinomio de grado dos completo.

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.4}}{2.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} \quad \Big\} x_1 = x_2 = -2$$

Las raíces de $P(x)$ son $x = -1$ y $x_1 = x_2 = -2$. Obtuvimos dos valores, ¿tiene entonces tres raíces?

MULTIPLICIDAD DE LAS RAÍCES

En el ejemplo anterior, al calcular las raíces de $P(x)$, resultaron dos de ellas iguales; decimos que se trata de una **raíz doble** o que tiene **multiplicidad dos**.

EN EL EJEMPLO ANTERIOR

Raíces de $P(x)$	Multiplicidad de las raíces
$x = -1$	1
$x = -2$	2

¿Cuánto deben sumar las multiplicidades de las raíces de un polinomio de grado n que tiene todas sus raíces reales?

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Factorizar un polinomio es escribirlo como producto de polinomios primos. ¿Cuándo un polinomio es primo?

Los factores son aquellos elementos que intervienen en una multiplicación.

Un polinomio de grado no nulo es **primo** o **irreducible** cuando no puede ser expresado como producto de dos o más polinomios de menor grado. Entonces, son primos todos los polinomios de grado uno o aquellos de grado dos con raíces no reales.
Existen distintas formas de factorizar polinomios, pero antes de estudiarlos, diremos que todo polinomio $P(x)$ compuesto y de grado n que tenga n raíces reales puede factorizarse como:

$$P(x) = a_n (x - r_1) \cdot (x - r_2) \ldots (x - r_n)$$

Donde a_n es el coeficiente principal de $P(x)$ y $r_1, r_2 \ldots r_n$ son las n raíces de $P(x)$.

OTRAS TÉCNICAS PARA FACTORIZAR

EXTRAER FACTORES COMUNES

Ya hemos definido qué es un factor; que sea común hace referencia a que se encuentra en todos los términos. Para extraer, entonces, un factor común debemos identificar los elementos comunes de todos los términos y extraerlos fuera de un paréntesis.

EJEMPLOS

1. Si $P(x) = 3x^6 + 12x^3 - 15x$, observamos que 3 es un factor común a los tres términos y x también. Podemos extraerlos como *factores comunes. Entonces* $P(x) = 3x \cdot (x^5 + 4x^2 - 5)$.
¿Existe alguna propiedad conocida que permita verificar que no cambiamos la expresión asociada a $P(x)$?

¿Podrían haber extraído x^6 como factor común? ¿$P(x)$ está totalmente factorizado?

2. Si $Q(x) = 3x^6 + 12x^3 - 8x^2$, podemos escribir $Q(x) = 3x^2 \cdot \left(x^4 + 4x - \frac{8}{3}\right)$. Aunque 3 no sea un factor común del último término, de todos modos puede extraerse.

3. Si $R(x) = -4x^2 + 12x$, podemos extraer $-4x$ factor común: $R(x) = -4x \cdot (x - 3)$

EXTRAER FACTORES COMUNES POR GRUPOS

Algunos polinomios presentan una estructura que nos permite formar grupos y sacar factores comunes en cada uno de esos grupos. Una vez hecho esto, aparece un nuevo factor común.

EJEMPLO

Sea $Q(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 8$

Identificamos factores comunes a cada grupo

$$Q(x) = \underbrace{x^3 + 4x^2}_{factor\ común\ x^2} - \underbrace{2x - 8}_{factor\ común -2}$$

Queda un nuevo factor visible

$$Q(x) = x^2 \cdot \underbrace{(x+4)}_{factor\ común} - 2 \cdot \underbrace{(x+4)}_{factor\ común}$$

Lo extraemos

$$Q(x) = (x+4) \cdot (x^2 - 2)$$

Para expresar a $Q(x)$ de forma factorizada, faltaría descomponer $x^2 - 2$.

Si la agrupación se realiza asociando $(x^3 - 8) + (4x^2 - 2x)$
¿Podrían aplicar factor común por grupos?

DIFERENCIA DE CUADRADOS

Analizando el título de este apartado, cada vez que hablamos de una diferencia nos referimos a una resta, y “de cuadrados” se refiere a los elementos de la resta elevados al cuadrado.
En general se cumple que:

$$x^2 - a^2 = (x - a) \cdot (x + a)$$

¿CÓMO PODRÍAN DEMOSTRAR ESTA IGUALDAD?

EJEMPLOS

1. Sea $P(x) = x^2 - 9$; podríamos escribirlo como $x^2 - 3^2$ y reconocemos una diferencia de cuadrados es equivalente a

$$P(x) = (x - 3) \cdot (x + 3)$$

2. Sea $Q(x) = -3x^2 + 6$; podemos extraer FACTOR COMÚN el -3. Obtenemos $-3 \cdot (x^2 - 2)$, para factorizar la diferencia de cuadrados podemos escribir a $2 = \sqrt{2}^2$.

Luego $Q(x) = -3 \cdot (x^2 - 2) = -3 \cdot (x^2 - \sqrt{2}^2) = -3 \cdot (x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2})$

¿Recuerdan cómo desarrollar el cuadrado de un binomio $(a + b)^2$?

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Al contestar la pregunta anterior, seguramente obtuvieron $a^2 + 2.ab + b^2$. A estos tres términos se los llama TRINOMIO CUADRADO PERFECTO. ¿Cuáles son las características que posee esta estructura?

Recíprocamente, cuando tenemos que factorizar un trinomio, es conveniente analizar si corresponde a un trinomio cuadrado perfecto porque nos permite expresarlo como el cuadrado de un binomio.

$$\overbrace{(a \pm b)^2}^{cuadrado\ de\ un\ binomio} = \overbrace{a^2 \pm 2ab + b^2}^{trinomio\ cuadrado\ perfecto}$$

¿CÓMO PODRÍAN DEMOSTRAR ESTA IGUALDAD?

EJEMPLOS

1. Si $P(x) = x^2 - 2x + 1$, podemos afirmar que x^2 y 1 son cuadrado perfectos; luego $2x$ es el doble producto de las bases de esos cuadrados. Luego $P(x) = (x - 1)^2$.

2. Si $Q(x) = 4x^2 + 12x + 9$, podemos hacerlo mónico extrayendo FACTOR COMÚN 4. Luego $Q(x) = 4 \cdot \left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right)$. Vemos que x^2 y $\frac{9}{4}$ son cuadrados perfectos. El término restante es igual al doble producto de las bases de esos cuadrados, dado que $2.x.\frac{3}{2} = 3x$. Entonces $Q(x) = 4.\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$

¿La expresión $x^4 + 2x^2 - 4$ corresponde a un trinomio cuadrado perfecto? ¿Por qué?

DOBLE CUADRÁTICA O BICUADRÁTICA

Existen polinomios de grado cuatro incompletos de la forma $P(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Esto nos recuerda a polinomios de grado dos completos; para estos casos, utilizaremos la DOBLE CUADRÁTICA. Veámoslo con un ejemplo.

EJEMPLO

Sea $P(x) = 3x^4 + 18x^2 - 21$; podemos hacer una sustitución:

$$t = x^2 \;\Rightarrow\; P(t) = 3t^2 + 18t - 21$$

El polinomio $P(t)$ es de grado dos completo, por lo que utilizamos la fórmula resolvente para determinar sus raíces:

$$t_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-21)}}{2 \cdot 3}$$

Resolviendo, obtenemos que $t_1 = 1$ y $t_2 = -7$
Luego $P(t) = 3 \cdot (t - 1) \cdot (t + 7)$

Pero las raíces buscadas no eran para sino para , por lo que, utilizando la sustitución realizada y los valores obtenidos, podemos decir:

$$t_1 = x^2 = 1 \;\Longrightarrow\; \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{matrix}$$

$$t_2 = x^2 = -7 \;\Longrightarrow\; \left.\begin{matrix} x_3 = \sqrt{-7} \\ x_4 = -\sqrt{-7} \end{matrix}\right\} \; \textit{no pertenecen a } \mathbb{R}$$

Entonces $P(x) = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 7)$

¿Podemos factorizar a $Q(x) = x^4 + 4x - 5$ utilizando este método? ¿Por qué?

ALGUNAS SUGERENCIAS PARA FACTORIZAR POLINOMIOS

Hasta ahora hemos estudiado distintas formas para la factorización de polinomios.

Dado un polinomio, podrán utilizar cualquier método que sea posible aplicar según las características de él. Incluso en la mayoría de los casos necesitarán más de uno de ellos.

En general, sugerimos tratar de factorizarlo de la manera más sencilla posible.

- En primer lugar buscar extraer un factor común.
- Luego considerar el número de términos.
  - Si es un binomio, observen si es una diferencia de cuadrados.
  - Si es un trinomio, analicen si es un trinomio cuadrado perfecto o una bicuadrática.
  - Si tiene más de tres términos, traten de agrupar y utilizar factor común por grupos.
- Si es de grado dos, busquen sus raíces de la manera más conveniente.
- Si no corresponde a ninguno de los pasos anteriores, y es de grado mayor a dos pueden encontrar una raíz aplicando el Teorema de Gauss (recuerden que sus coeficientes deben ser números enteros), aplicar el algoritmo de Ruffini para hallar el cociente y expresar el dividendo como divisor por cociente. Si es necesario, aplicar nuevamente este procedimiento o cualquier otro que consideren conveniente.

RECUERDEN: para que el polinomio esté totalmente factorizado cada factor debe ser primo y el coeficiente principal tiene que ser un factor de esa descomposición.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Existen similitudes entre los números racionales y las expresiones algebraicas racionales. Te invitamos a que las encuentres a partir de las definiciones que te ofrecemos a continuación.
Para comenzar les sugerimos que repasen las definiciones y propiedades de números racionales que se desarrollan en el Capítulo 1: Números Reales

¿A QUÉ LLAMAMOS EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES?

Llamaremos *expresiones algebraicas racionales* a las expresiones de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios (expresiones algebraicas enteras) en una indeterminada x y $Q(x)\neq 0$.

¿Por qué $Q(x)$ no puede ser cero?

Cuando pensamos en los valores que puede tomar la variable x estamos hablando del dominio de validez.
En este caso, llamaremos **Dominio de Validez** de una expresión algebraica racional al conjunto de todos los números reales, excepto a aquellos valores que sean raíz del denominador.

EJEMPLOS

$\frac{3x}{x-2}$; $Dom: R-\{2\}$ $\frac{x+4}{x^2-9}$; $Dom: R-\{\pm 3\}$ $\frac{2x^2+4x+6}{x^2+3x}$; $Dom: R-\{-3;0\}$

Toda fracción puede expresarse de manera irreducible. ¿Cómo podríamos encontrar una expresión algebraica irreducible?

Las expresiones algebraicas racionales también pueden ser expresiones irreducibles.

EJEMPLOS

$\frac{3x}{x-2}$ $\frac{x+4}{x^2-9}=\frac{x+4}{(x+3)\cdot(x-3)}$ $\frac{x^2-x-2}{x^2-x-12}=\frac{(x-2)\cdot(x+1)}{(x-4)\cdot(x+3)}$

Para determinar que son expresiones algebraicas irreducibles factorizamos los polinomios numerador y denominador de cada una de ellas, en forma análoga a como lo hicimos con los números racionales en el Capítulo 1, y observamos que no comparten múltiplos en común.

Les proponemos establecer el dominio de validez de las anteriores expresiones racionales.

De igual manera que hicimos con los números racionales, las expresiones algebraicas racionales las podemos simplificar. Para esto se divide el numerador y el denominador de la fracción por un polinomio que sea factor común de ambos.

EJEMPLOS

$$\frac{3x+6}{x+2} = \frac{3\cdot\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} = 3 \qquad Dom: R - \{-2\}$$

$$\frac{x+3}{x^2-9} = \frac{\cancel{x+3}}{\cancel{(x+3)}\cdot(x-3)} = \frac{1}{x-3} \qquad Dom: R - \{-3; 3\}$$

$$\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6} = \frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x+1)}{(x+3)\cdot\cancel{(x-2)}} = \frac{x+1}{x+3} \qquad Dom: R - \{-3; 2\}$$

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Sigamos con la comparación entre números racionales escritos como fracciones y expresiones algebraicas racionales.

SUMAS Y RESTAS

• Si las expresiones tienen **igual denominador** sumamos o restamos sus numeradores según corresponda.

EJEMPLOS

$$\frac{x}{x-2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{x+x+2}{x-2}=\frac{2x+2}{x-2}=\frac{2(x+1)}{x-2} \qquad Dom: R-\{2\}$$

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2x-1}{x-1}=\frac{1-(2x-1)}{x-1}=\frac{1-2x+1}{x-1}=\frac{-2x+2}{x-1}=\frac{-2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}=-2 \qquad Dom: R-\{1\}$$

• Para expresiones de **distinto denominador**, debemos transformarlas en expresiones equivalentes, que tengan el mismo denominador. Para ello utilizamos el m.c.m.

EJEMPLOS

$$\frac{x}{x-2}+\frac{3x-1}{x^2-2x}=\underbrace{\frac{x}{x-2}+\frac{3x-1}{x\cdot(x-2)}}_{\text{Factorizamos los denominadores}}=\underbrace{\frac{x.x}{x\cdot(x-2)}+\frac{3x-1}{x\cdot(x-2)}}_{\text{Hallamos el m.c.m para obtener expresiones equivalentes.}}=\frac{x^2+3x-1}{x\cdot(x-2)} \qquad Dom: R-\{0;2\}$$

El m.c.m. entre dos o más polinomios es igual al producto de los factores primos comunes y no comunes con su mayor exponente.

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

El resultado de multiplicar dos expresiones algebraicas racionales es otra expresión algebraica racional, cuyo numerador y denominador son el producto de los numeradores y denominadores de las expresiones dadas (tal como lo hacíamos con los números fraccionarios).

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x)\cdot R(x)}{Q(x)\cdot S(x)}; \qquad Q(x)\neq 0 \wedge S(x)\neq 0$$

EJEMPLO

$$\frac{x^2}{x^2-4}\cdot\frac{x+2}{3x^3-3x}=\frac{\cancel{x}\cdot x}{\cancel{(x+2)}\cdot(x-2)}\cdot\frac{\cancel{x+2}}{3\cancel{x}\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x}{(x-2)}\cdot\frac{1}{3\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x}{3\cdot(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}$$

Factorizamos los polinomios y simplificamos.

¿Cuál es el dominio de validez de este producto?

Debemos recordar que para dividir dos números racionales, sólo basta con multiplicar por el inverso del segundo.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}\Rightarrow\frac{P(x)}{Q(x)}:\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{S(x)}{R(x)};\qquad Q(x)\neq 0\wedge S(x)\neq 0\wedge R(x)\neq 0$$

EJEMPLO

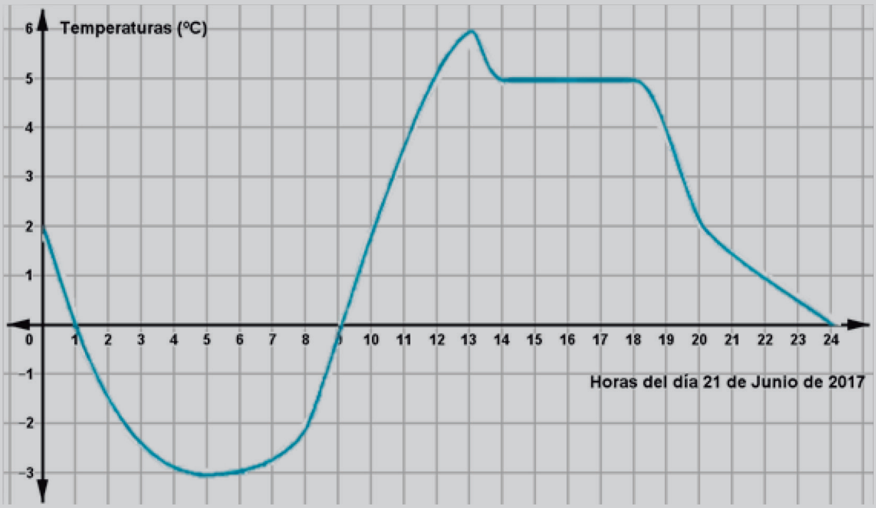
$$\frac{2x-3}{x+5}:\frac{6x-9}{x^2-25}=\frac{2x-3}{x+5}\cdot\frac{x^2-25}{6x-9}=\frac{\cancel{2x-3}}{\cancel{x+5}}\cdot\frac{(x-5)\cdot\cancel{(x+5)}}{3\cancel{(2x-3)}}=\frac{x-5}{3}\qquad Dom: R-\left\{-5;\frac{3}{2};5\right\}$$

Factorizamos cada polinomio y simplificamos

CAPÍTULO 3

INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE FUNCIONES Y ECUACIONES

En una estación meteorológica se registraron las temperaturas del 21 de junio de 2017 durante todo el día. La estación tiene un sensor que registra valores cada 1 segundo y, mediante un software, proporciona el siguiente gráfico:



¿Qué variables se relacionan? ¿Cómo caracterizarían esa relación?

¿CUÁNDO DECIMOS QUE UNA RELACIÓN ENTRE VARIABLES ES FUNCIÓN?

Una **función** es una relación entre dos o más variables. Nos abocaremos a recordar aquellas que sólo involucran dos: una variable independiente y una dependiente, a las que generalmente identificamos con las letras x e y respectivamente. Esta relación, en particular, asigna a cada valor de x un único valor de y.

Esta noción es uno de los conceptos matemáticos más utilizados por otras disciplinas para modelizar situaciones.
Pueden expresarse mediante tablas, gráficas o fórmulas.

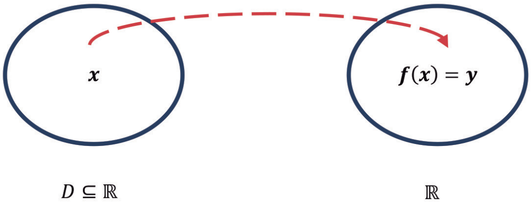
Por convención, cuando graficamos en coordenadas cartesianas, ubicamos la variable independiente x en el eje horizontal (o de las abscisas) y la variable dependiente y en el eje vertical (o de las ordenadas). Por lo tanto, la función queda representada por todos los puntos o pares ordenados $(x; y)$ que cumplen con esa relación, donde x es el valor de la primera coordenada del punto, e y, el de la segunda.

Generalmente, anotamos una **función real *f(x)*** mediante los símbolos:

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Una función real es una relación que asocia a cada número real x un único número real $f(x)$.

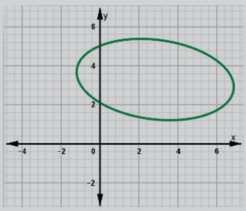
Interpretamos que la función f "sale" o toma valores del conjunto D (valores reales) y "llega" al conjunto $\mathbb{R}$ o produce valores reales. ¿Qué representa el conjunto D?

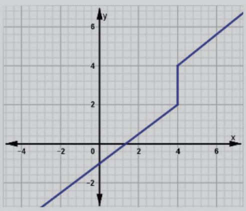


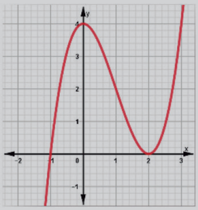
En la situación inicial, en la representación del gráfico, podemos observar que intervienen dos variables, es decir, dos magnitudes que pueden variar. Una de ellas representa las horas del día 21 de junio de 2017 (variable independiente t) y la otra, la temperatura (medida en ºC) en cada instante (variable dependiente T). Vemos, además, que a cada instante de tiempo le corresponde una única temperatura.

Asumimos que esa curva es un "modelo" de la situación que plantea el problema, por lo tanto, es una aproximación. Es decir, el sensor detecta valores cada un segundo, por lo cual la variable independiente "tiempo", en este caso, no es continua sino discreta. Entonces, desde un punto de vista estrictamente matemático, no podríamos "unir los puntos de la curva"; sin embargo, es útil hacerlo para poder visualizar mejor el comportamiento de las temperaturas durante ese día y así poder predecir aproximadamente qué ocurrió en puntos intermedios.

¿Cuáles de las siguientes gráficas representan funciones? ¿Por qué?







En la situación inicial, ¿qué valores puede tomar x? ¿Y la variable dependiente y?

ALGUNOS ELEMENTOS PARA ANALIZAR UNA FUNCIÓN

DOMINIO E IMAGEN

Cuando nos preguntamos sobre el conjunto de valores que "puede tomar" la variable independiente, estamos hablando del **dominio** de la función: son aquellos valores para los cuales la función está definida; se simboliza: $Dom\ (f)$.
El dominio es el conjunto de "salida" de la función. Denominamos al conjunto de "llegada" **codominio**. Esto es, el conjunto de todos los valores que "puede tomar" la función.
En cambio, si nos preguntamos sobre el conjunto de valores que "toma" la variable dependiente, al aplicarle la función a los elementos del dominio, estamos en presencia de su **imagen**. Se simboliza: $Im\ (f)$. Como estos valores son parte del codominio de la función, decimos que la imagen está incluida en él.

EJEMPLO

Considerando la situación inicial, la función representada es $T(t)$. Su dominio e imagen son:

$Dom\ (T) = [0; 24]$

$Im\ (T) = [-3; 6]$

Cuando se trata de una situación en contexto real, estos conjuntos suelen presentar restricciones de acuerdo con las variables que estén involucradas.

Siguiendo con la situación inicial, ¿se registró en algún momento del día una temperatura de $0°C$? Si fue así, ¿cuándo?

INTERSECCIÓN DE LA CURVA CON LOS EJES COORDENADOS

Decir que la temperatura registrada fue de $0°C$ es pensar para qué valores de t la función T toma el valor cero; es decir, en qué valores de x la curva que la representa interseca (corta) al eje de las abscisas. ¿Qué significa esto?
Estudiar la **intersección** de la gráfica de una función **con el eje** $\boldsymbol{x}$ es determinar **para qué valores de** $\boldsymbol{x}$ se cumple que $f(x) = 0$. En otras palabras, es preguntarnos sobre los valores del dominio que anulan la función. Se denomina a estos valores **raíces o ceros** de la función. Y a su conjunto se lo simboliza C^o. ¿Cuánto vale la coordenada *y* de este punto?
Pensemos ahora qué sucede con la **intersección** de una curva **con el eje de las ordenadas.** Se denomina a este punto de intersección **ordenada al origen** de la función. ¿Cuánto vale la coordenada x de este punto?

En síntesis,

CORTES DE f CON LOS EJES COORDENADOS	
RAÍCES O CEROS	$f(x) = \mathbf{0}$
ORDENADA AL ORIGEN	$f(\mathbf{0}) = y$

EJEMPLO

Los valores del $Dom\ T(t)$ que anulan la función son $t_1 = 1$ y $t_2 = 9$. Es decir que el día 21 de junio de 2017 se registraron temperaturas de $0°C$ en dos momentos, a la 1 y a las 9 de la mañana.
La ordenada al origen de $T(t)$ es $T = 2$. A las 0 hs del día 21 de junio de 2017 se registró una temperatura de $2°C$.
Podemos escribir estos elementos como puntos porque representan intersecciones de la curva con los ejes coordenados:

Raíces $(1; 0)$ y $(9; 0)$ Ordenada al origen $(0; 2)$

Y a su vez, podemos escribir el conjunto de los ceros: $C^o = \{ 0; 9 \}$.

Durante el día 21 de junio de 2017, ¿hubo temperaturas por debajo de los $0°C$? ¿Y por encima? De haber sido así, ¿entre qué horas del día sucedieron tales acontecimientos?

CONJUNTOS DE POSITIVIDAD Y NEGATIVIDAD

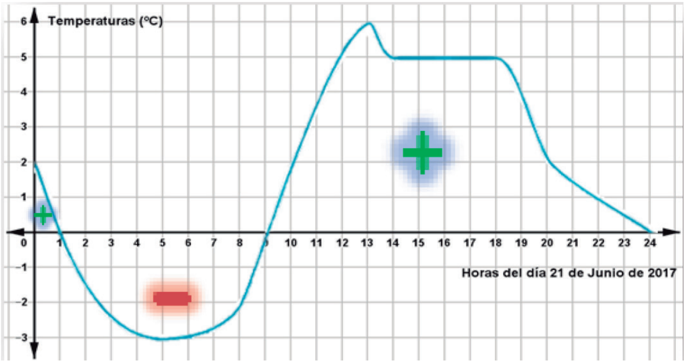
Analizar si la gráfica de la función está por debajo o encima del eje es establecer para qué valores del dominio la función es positiva y para cuáles es negativa.
Se denomina al conjunto de todos los valores del dominio para los que la función es positiva **conjunto de positividad,** y al conjunto de todos los valores del dominio para los que la función es negativa, **conjunto de negatividad.** Se denotan respectivamente: C^+ y C^-. En símbolos:

$$C^+ = \{\forall x \in Dom\ f / \ f(x) > 0\} \qquad C^- = \{\forall x \in Dom\ f / \ f(x) < 0\}$$

EJEMPLO

Entre la 1 hs y las 9 hs del día 21 de junio de 2017 se registraron temperaturas por debajo de los $0°C$. Y el resto del día se registraron temperaturas por encima de los $0°C$. En símbolos:

$$C^- = (1; 9) \qquad C^+ = [0; 1) \cup (9; 24)$$



A partir de este ejemplo, podemos observar que la unión entre C^-, C^0 y C^+ conforma el dominio de la función.

¿Se registraron aumentos en la temperatura? ¿Y disminuciones? Si fue así, ¿entre qué horas del día sucedieron?

INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Otros elementos que podemos analizar de una función son los **intervalos de crecimiento** ($\mathbf{I}^{\uparrow}$) y de **decrecimiento** ($\mathbf{I}^{\downarrow}$). ¿Recuerdan cómo se obtienen?
Si a medida que aumenta la variable independiente también lo hace la variable dependiente, decimos que la función es creciente para esos valores del dominio. En cambio, si a medida que aumenta x la variable y disminuye, decimos que la función es decreciente para esos valores del dominio.

Consideremos un intervalo $I \in Dom(f)$:

- La función $f(x)$ será creciente en I si $\forall x_1, x_2 \in I \;\; x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
- La función $f(x)$ será decreciente en I si $\forall x_1, x_2 \in I \; x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

Si $f(x)$ es creciente (o decreciente) en todo su dominio, diremos que $f(x)$ es estrictamente creciente (o decreciente).

EJEMPLO

Entre la 0 hs y la 5 hs del día 21 de junio de 2017 "bajó" la temperatura, luego "subió" desde las 5 hs hasta las 13 hs y bajó durante una hora más. A partir de las 14

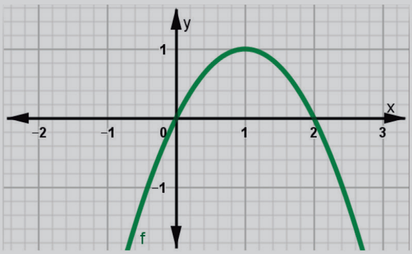
hs y hasta las 18 hs se mantuvo aproximadamente la misma temperatura, momento en el que comenzó a bajar nuevamente hasta terminar el día.
Los intervalos de crecimiento y decrecimiento para la función $T(t)$ son:

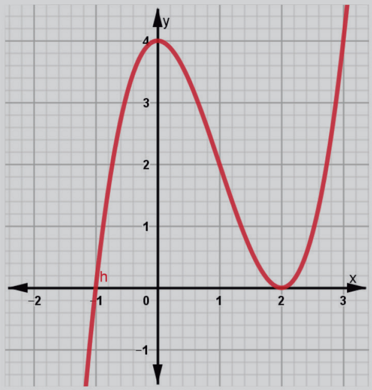
$$I^{\downarrow} = (0;5) \cup (13;14) \cup (18;24) \qquad I^{\uparrow} = (5;13)$$

¿Por qué la positividad y la negatividad, el crecimiento y el decrecimiento se escriben como intervalos abiertos o semiabiertos?

¿Qué ocurrió con la temperatura entre las 14 hs y las 18 hs del 21 de junio de 2017?

Para cada una de las siguientes gráficas, indicar:





A) DOMINIO E IMAGEN.

B) RAÍCES Y ORDENADA AL ORIGEN.

C) CONJUNTOS DE POSITIVIDAD Y NEGATIVIDAD.

¿QUÉ TIPOS DE FUNCIONES CONOCEMOS?

Existen distintas clasificaciones de las funciones de acuerdo con las características que observemos. En este curso haremos foco en una sola de estas clasificaciones.
Funciones Algebraicas. En ellas, las operaciones que afectan a la variable independiente son sumas, restas, productos, cocientes, potenciación y radicación. Ejemplo de este tipo son las *Funciones polinómicas.* ¿Conocen alguna otra función algebraica?

Funciones Trascendentes. En ellas, no podemos obtener las imágenes mediante operaciones algebraicas. Ejemplos de ellas son las *Funciones exponenciales.* ¿Recuerdan haber estudiado otra función de este tipo?
A lo largo de este capítulo y los siguientes estudiaremos estas funciones.

FUNCIONES Y ECUACIONES ALGEBRAICAS: FUNCIONES Y ECUACIONES POLINÓMICAS

En la situación inicial, entre las 18 hs y las 21 hs podemos observar un tramo en el que la temperatura no varió. ¿Recuerdan cómo se denomina una función que presenta esta característica en todo su dominio?

¿A QUÉ LLAMAMOS FUNCIÓN CONSTANTE?

Llamamos **Función Constante** o Polinómica de Grado Cero a aquellas funciones cuya expresión general es:

$$f(x) = c$$

Para todos los valores de x la función toma el valor c.

¿CUÁL ES EL DOMINIO Y LA IMAGEN DE ESTA FUNCIÓN?

El dominio serán todos los números reales y la imagen será sólo el valor c. Es decir:

$$Dom\,(f) = \mathbb{R} \qquad\qquad Im\,(f) = \{c\}$$

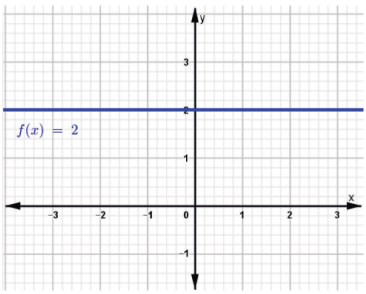
¿QUÉ TIPO DE CURVA REPRESENTA GRÁFICAMENTE A ESTAS FUNCIONES?

La curva que la representa gráficamente es una **recta paralela al eje x.**

EJEMPLO

$$f(x) = 2$$

Para todos los valores del dominio, es decir, de la variable independiente , la función toma el valor.



El costo de la bajada de bandera en una empresa de remises está fijado en \$16,50. Y se sabe que, por cada 100 m recorridos, se adicionan \$2,50. Si se pretende programar los relojes con una fórmula que permita calcular el costo de un viaje determinado, ¿cómo podríamos establecerla?

¿A QUÉ LLAMAMOS FUNCIÓN LINEAL?

Llamamos **Función Lineal** o Polinómica de Primer Grado a aquellas funciones cuya expresión general es:

¿Por qué se denominará polinómica de primer grado?

$$f(x) = a \cdot x + b$$

Los coeficientes principal e independiente de la función lineal reciben el nombre de **pendiente** y **ordenada al origen,** respectivamente.

¿Qué valores pueden tomar los coeficientes a y b?

EJEMPLOS

Los siguientes son ejemplos de funciones lineales, ¿podrían determinar el valor de la pendiente y el de la ordenada al origen?

$f(x) = 2x + 3$ $\qquad g(x) = -\frac{1}{2}x$ $\qquad h(x) = \frac{3}{5}x - 0{,}75$ $\qquad i(x) = \sqrt{2} - x$

La expresión que permite calcular el costo de un viaje de la empresa de remises es la función lineal $C(x) = 2{,}5\ x + 16{,}5$ ¿Cuáles son las variables que intervienen y qué valores pueden tomar?

¿CUÁL ES EL DOMINIO Y LA IMAGEN DE UNA FUNCIÓN LINEAL?

Tanto el dominio como la imagen de estas funciones son todos los reales. Es decir:

$$Dom\ (f) = \mathbb{R} \qquad Im\ (f) = \mathbb{R}$$

¿Podrían representar gráficamente la función $C(x)$? ¿Recuerdan cómo?

¿CÓMO REPRESENTAMOS GRÁFICAMENTE UNA FUNCIÓN LINEAL?

La representación gráfica de este tipo de funciones es la **recta.** Su ecuación explícita es:

¿Qué representan los valores de a y b en la gráfica?

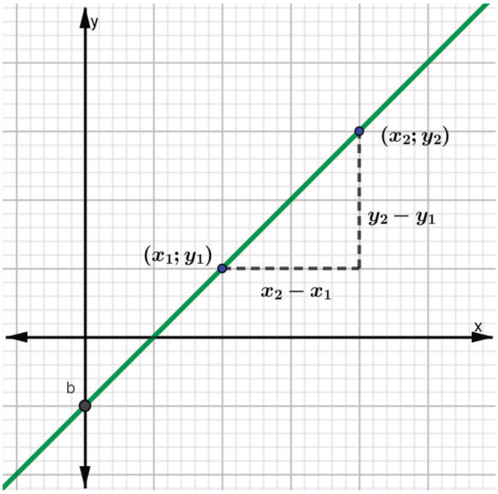
$$y = a \cdot x + b$$

donde a es la pendiente de la recta y b la ordenada al origen.

Se define la pendiente como la razón entre la variación sobre el eje y y la variación sobre el eje x. En símbolos, siendo $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ dos puntos pertenecientes a la recta:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

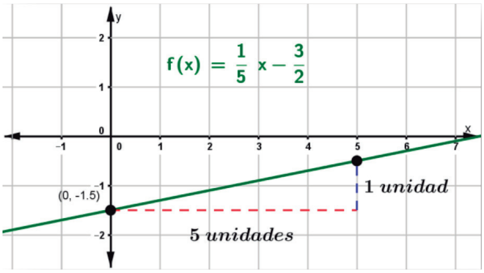
Gráficamente,



EJEMPLO

Si queremos graficar la recta $f(x) = \frac{1}{5}x - \frac{3}{2}$, primero identificamos en la ecuación la ordenada al origen $-\frac{3}{2}$ y la marcamos en la gráfica.

A partir de ella, marcamos un segundo punto de la recta "moviéndonos" según nos indica la pendiente $\frac{1}{5}$. Es decir, nos movemos 5 unidades hacia la derecha y subimos 1 unidad.



Finalmente, trazamos la recta uniendo la ordenada al origen y el segundo punto.

En el ejemplo la pendiente es positiva, ¿qué podemos decir de la recta? ¿Y si fuese negativa?

La pendiente de la recta nos anticipa si esta es **creciente o decreciente**. Es decir,

Si $a > 0$ la recta es creciente. Si $a < 0$ la recta es decreciente.

Volvamos al problema del remis. Sabemos que en la expresión $C(x)$ la ordenada al origen es $16{,}5$. Por lo tanto, su gráfica intersecará al eje y en el punto $(0;\ 16{,}5)$. ¿Podrían determinar en qué punto intersecará al eje x? Interpreten ese punto en el contexto del problema.

¿CÓMO DETERMINAMOS LA RAÍZ DE UNA FUNCIÓN LINEAL?

En la sección *Intersección de la curva con los ejes coordenados* (página 61), mencionamos que, para determinar los ceros o raíces de una función, debemos igualar ésta a cero, es decir, determinar para qué valores de x o del dominio se cumple que $f(x) = 0$. Plantear esta expresión es resolver una **ecuación lineal**. La ecuación de la recta es una ecuación lineal, ¿por qué?

¿QUÉ ES UNA ECUACIÓN?

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que involucra una o más variables, llamadas **incógnitas.**

¿Cuándo decimos que un valor es solución de la ecuación? Cuando al reemplazar el valor de la incógnita por uno específico se cumple o satisface la igualdad, entonces es solución de la ecuación. Se denomina al conjunto de todos estos valores **conjunto solución** (CS).

En particular, si la igualdad presenta alguna de las formas:

$$a \cdot x + b = c$$

donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$, o cualquier equivalente a una de esta forma, decimos que se trata de una ecuación lineal.

EJEMPLO

Hallemos la raíz de la función $C(x) = 2{,}5\ x + 16{,}5$

$2{,}5\ x + 16{,}5 = 0$	Igualamos a cero.
$2{,}5\ x + 16{,}5 - 16{,}5 = 0 - 16{,}5$	Restamos a ambos miembros de la igualdad 16,5
$2{,}5\ x = -\ 16{,}5$	
$(2{,}5\ x) : 2{,}5 = (-\ 16{,}5) : 2{,}5$	Dividimos ambos miembros por 2,5.
$x = -\ 6{,}6$	

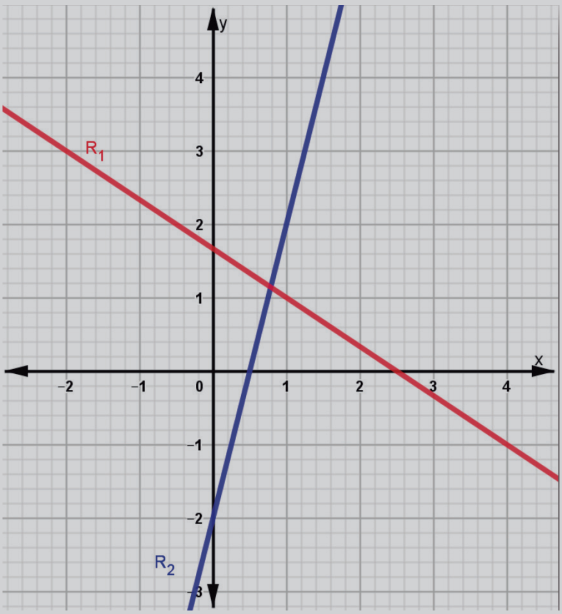
El conjunto solución de esta ecuación es $CS = \{-6{,}6\}$. Es decir que $C(x)$ tiene raíz en $x = -6{,}6$. Este valor no tiene sentido en el contexto del problema, ¿por qué?

Les proponemos resolver las siguientes ecuaciones lineales:

$$\frac{1}{5}x - \frac{3}{2} = 0 \qquad 7x + 2x = 9x - 5 \qquad \frac{1}{4}x - 3 + 0{,}25x = \frac{1}{2}x - \frac{6}{2}$$

Luego indicar el conjunto solución de cada una de ellas.

¿Cómo harían para determinar una expresión que represente a cada una de las siguientes rectas?



¿CÓMO DETERMINAMOS LA ECUACIÓN DE UNA RECTA A PARTIR DE ALGUNOS DE SUS ELEMENTOS?

• SI CONOCEMOS LA PENDIENTE Y UN PUNTO QUE PERTENECE A LA RECTA

EJEMPLO

Hallemos la ecuación de la recta que tiene pendiente $\mathbf{2}$ y pasa por el punto $(\mathbf{5; 1})$.
Sabemos que la forma general de una ecuación es: $y = a \cdot x + b$ y conocemos la pendiente $a = 2$. Entonces, $y = 2x + b$.
Si la recta pasa por el punto $(\mathbf{5; 1})$, entonces la ecuación que buscamos debe responder a ese punto, es decir, si reemplazamos el $\mathbf{5}$ en la x, debe dar como resultado $\mathbf{1}$ en la y. Este reemplazo nos permite hallar la ordenada al origen b:

$$y = 2x + b$$

$$1 = 2 \cdot 5 + b$$

$$1 - 10 = b$$

$$\boxed{\mathbf{-9 = b}}$$

Finalmente, la ecuación queda determinada de la siguiente manera: $\boxed{\mathbf{y = 2x - 9}}$

• SI CONOCEMOS DOS PUNTOS QUE PERTENECEN A LA RECTA

EJEMPLO

Hallemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(\underbrace{\mathbf{2}}_{x_1}\,;\ \underbrace{\mathbf{1}}_{y_1})$ y $(\underbrace{\mathbf{1}}_{x_2}\,;\ \underbrace{\mathbf{5}}_{y_2})$.

x	y
2 $\underbrace{1}_{2-1=1}$	1 $\underbrace{5}_{1-5=-4}$

Realizamos el cociente entre la variación en y y la variación en x para hallar la pendiente de la recta.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{1 - 2} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$\frac{variación\ en\ y}{variación\ en\ x} = -\frac{4}{1} = -4$$

Ahora, conociendo la pendiente de la recta, este caso se reduce al anterior, es decir, que reemplazando en la ecuación cualquiera de los dos puntos que pertenecen a la recta ya podemos determinarla por completo. Entonces, ¿cuánto vale la ordenada al origen? ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos?

Les proponemos escribir una ecuacion de la recta, para cada uno de los casos, que cumpla con las condiciones dadas

- Su ordenada al origen es 6 y pasa por el punto $(-1;3)$.
- Pasa por los puntos $(-1;3)$ y $(4;1)$.

¿Podrían decidir cómo son entre sí las siguientes rectas?

$$R: y = 7x + 1 \qquad S: y = -\frac{1}{7}x - 8 \qquad T: y = 7x - \frac{5}{6}$$

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

- Dos o más rectas son **paralelas** (||) *si y sólo si sus pendientes son iguales.* ¿Qué ocurre si las ordenadas también coinciden?
- Dos rectas son **perpendiculares** ($\perp$) *si y sólo si sus pendientes son inversas y opuestas.* ¿Qué ocurre si las ordenadas también coinciden?

Los invitamos a responder las siguientes preguntas:

¿Cuál será la pendiente de una recta M perpendicular a la recta $S: y = -\frac{1}{3}x + 1$?

¿Cuál será la ecuación de una recta N paralela a S y que pase por el punto $(0;-3)$?

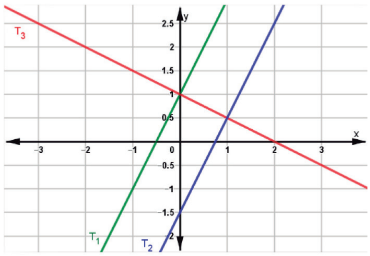
EJEMPLO

Consideremos las gráficas de las siguientes rectas en un mismo sistema de ejes coordenados:

$T_1 : y = 2x + 1$

$T_2 : y = 2x - \frac{3}{2}$

$T_3 : y = -\frac{1}{2}x + 1$



Consideremos las gráficas de las siguientes rectas en un mismo sistema de ejes coordenados:
Observando sus pendientes, podemos afirmar que $T_1 \parallel T_2$ y que $T_1 \perp T_3$ y también que $T_2 \perp T_3$.

Y gráficamente podemos asociar paralelismo con dos rectas que nunca van a intersecar, y perpendicularidad con dos rectas que intersecan formando entre sí un ángulo recto.

¿Cómo podrían determinar las coordenadas del punto de corte entre las rectas de la actividad de la página 69?

¿QUÉ ES UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES? ¿QUÉ BUSCAMOS AL RESOLVERLO?

Una situación que podría presentarse cuando conocemos la ecuación de dos rectas en el plano es determinar si se cortan o intersecan, y en qué punto o puntos lo hacen.
Resolver esta situación deriva en plantear un **sistema de ecuaciones lineales.** Esto es, un sistema formado por dos ecuaciones (pueden ser más) de primer grado con dos incógnitas cada una (¿cuáles son esas incógnitas?). En símbolos:

$$\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y = e \\ c \cdot x + d \cdot y = f \end{cases}$$

donde a, b, c, d, e y f son números reales.
Resolverlo es hallar el o los puntos $P=(x_0;\ y_0)$, si existen, que satisfacen simultáneamente a ambas ecuaciones. Estos puntos conforman el **conjunto solución del sistema.**

¿CÓMO PODEMOS RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES?

Existen varios métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales; ¿recuerdan cuáles son?

MÉTODO GRÁFICO

Para resolver gráficamente un sistema de ecuaciones, debemos representar ambas rectas en un mismo sistema de ejes cartesianos y hallar, si existe, la intersección de ambas. Este método nos permite observar una solución aproximada, ¿por qué?

MÉTODOS ANALÍTICOS

Para resolver analíticamente un sistema de ecuaciones existen varios métodos. Todos nos permiten obtener el mismo resultado; la conveniencia de uno u otro dependerá de cómo está planteado el sistema original. En este curso nos interesa recordar los siguientes:

- **Método de Sustitución:** despejamos una de las variables en una de las ecuaciones, y luego reemplazamos esta expresión en la otra ecuación para obtener, si existe, el valor de una de las incógnitas, es decir, una de las coordenadas del punto de intersección. Finalmente, reemplazamos el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales para obtener el valor de la otra coordenada del punto.
- **Método de Igualación:** despejamos en ambas ecuaciones la misma incógnita y luego igualamos las ecuaciones obtenidas para hallar el valor de una de las incógnitas, si es que este existe. Finalmente, al igual que en el método anterior, reemplazamos este valor en cualquiera de las ecuaciones iniciales para obtener el valor de la otra incógnita.

Si tuviésemos que resolver un sistema y luego graficarlo. ¿Qué variable nos conviene despejar? ¿Por qué?

EJEMPLO

Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones por un método analítico y luego graficarlo:

$$\begin{cases} 2y - 7x = 1 & (1) \\ y - \dfrac{5}{2} = -\dfrac{1}{2}x & (2) \end{cases}$$

Vamos a resolverlo analíticamente por ambos métodos.

- Por *método de sustitución*

Despejamos de la ecuación (1) la incógnita y.

$$2y - 7x = 1$$

$$2y = 1 + 7x$$

$$y = (1 + 7x) \div 2$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}x}}$$

Reemplazamos la expresión obtenida de *y* en la ecuación (2) para obtener el valor de x.

$$y - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}x$$

$$\overbrace{\boldsymbol{\frac{1}{2} + \frac{7}{2}x}}^{y} - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}x$$

$$\frac{7}{2}x + \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}$$

$$4x = 2$$

$$x = \frac{2}{4} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}}$$

Reemplazamos el valor obtenido de x en cualquiera de las ecuaciones que conforman el sistema para hallar el valor correspondiente a y.

$$2y - 7x = 1$$

$$2y - 7 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$2y = 1 + \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{9}{2} \div 2 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{y = \frac{9}{4}}}$$

$\boxed{\boldsymbol{S = \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)}}$ Las rectas se cortan (intersecan) en este punto.

¿Podríamos haber despejado la variable x en lugar de la y al principio? ¿Por qué? ¿Cómo podemos verificar la solución del sistema?

- Por *método de igualación*

Despejamos de ambas ecuaciones la variable $\boldsymbol{y}$. El despeje de la ecuación (1) ya lo hemos realizado en el método anterior:

$$\boxed{\boldsymbol{y = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}x}}$$

Despejamos y de la ecuación (2).

$$y - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}x$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}}$$

Igualamos ambas expresiones obtenidas para $\boldsymbol{y}$.

$$\frac{1}{2} + \frac{7}{2}x = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$\frac{7}{2}x + \frac{1}{2}x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$$

$$4x = 2$$

$$x = \frac{2}{4} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}}$$

¿Cómo determinamos el valor de $\boldsymbol{y}$?

Claramente, el punto de intersección hallado por ambos métodos es el mismo.

¿Podrían graficar el sistema anterior y mostrar que la solución coincide con la hallada analíticamente? ¿Qué tipo de sistema es? ¿Por qué?

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES

Los sistemas lineales pueden clasificarse en:

- **Compatibles** (SC), si tienen solución. Estos, a su vez, pueden ser:
  - Determinados (SCD), si tienen una única solución. Como en el ejemplo desarrollado anteriormente.
  - Indeterminados (SCI), si tienen infinitas soluciones. ¿Cómo son las rectas en este caso?

- **Incompatibles** (SI), si no tienen solución. ¿Qué quiere decir que no tenga solución? ¿Cómo son las rectas en este caso?

Hallar el conjunto solución de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 5x - 2y = -16 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2x + 3 \\ 3y = 5 - 6x \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y + x = 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Realizar una gráfica de cada uno mostrando que la solución hallada coincide y clasificarlos.

CAPÍTULO 4

FUNCIONES Y ECUACIONES CUADRÁTICAS

Dadas las siguientes fórmulas, determinen cuáles representan funciones cuadráticas. ¿Cómo las reconocen?

$f(x) = 3x + 7$ $\qquad$ $i(x) = 2x^2 - 5x$

$g(x) = 2(x-1)^2 + 9$ $\qquad$ $j(x) = -6x$

$h(x) = 5x^3 + 2x$ $\qquad$ $k(x) = -x(x+2)$

¿A QUÉ LLAMAMOS FUNCIÓN CUADRÁTICA?

La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b, c números reales y $a \neq 0$, es una **función cuadrática** expresada en su forma polinómica.

¿Por qué se llama forma polinómica?

EJEMPLOS DE FUNCIONES CUADRÁTICAS ESCRITAS EN FORMA POLINÓMICA

$f(x) = 2x^2 — 3x + 2$ $\qquad$ $g(x) = 6x^2$

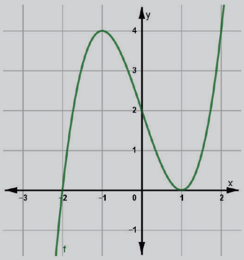
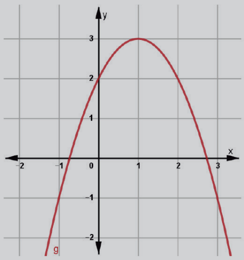
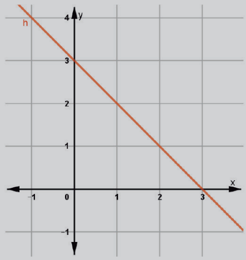
$h(j) = 15j - j^2$ $\qquad$ $j(t) = 3t^2 + 5$

¿Cuánto valen a, b, c en cada caso?

Recordamos tres formas de expresar una función cuadrática, cada una nos “muestra” distintos elementos de la curva que representa a la función.

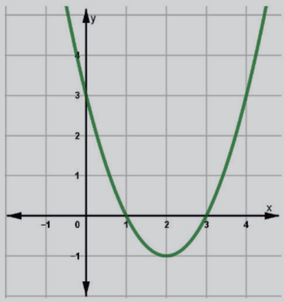
Forma	Expresión	Parámetros
Polinómica	$f(x) = ax^2 + bx + c$	a, b, c
Canónica	$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$	a, x_v, y_v
Factorizada	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	a, x_1, x_2

¿Cuál de las siguientes gráficas representa una función cuadrática?

La gráfica de una función cuadrática es una curva llamada **parábola**. Ésta es simétrica con respecto a una recta paralela al eje de las ordenadas, que pasa por el punto mínimo o máximo. Esta recta recibe el nombre de **eje de simetría**.

Les proponemos marcar en el gráfico: vértice, eje de simetría y un par de puntos simétricos.



ALGUNAS CARACTERISTICAS DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

- Es una curva con dos ramas, una creciente y otra decreciente presentando un valor **máximo o mínimo** en un punto que denominamos **vértice**.
- Está compuesta por **puntos simétricos** (salvo el vértice). Éstos son los puntos del dominio de la función que tienen la misma imagen.
- El **eje de simetría** es una recta vertical que corta la parábola en el vértice, dividiéndola en dos partes congruentes y simétricas.

A continuación, listamos algunos ejemplos de situaciones en contexto real donde se utiliza la función cuadrática para modelizar:

- El rendimiento de gasoil r (en km por litro) de un auto está relacionado con la velocidad v (en km/h) por la función $r(v) = 4v - \frac{1}{20}v^2$
- Desde un barco que se encuentra en situación de emergencia se efectúa un disparo, en forma vertical, con una pistola de señales. El destello podrá verse desde la base naval más cercana únicamente mientras el proyectil se encuentre a una altura no menor de 195 metros sobre el nivel del mar. Los técnicos que integran la tripulación estiman que, de acuerdo con las características de la pistola de señales y con las condiciones en que se dispara, la altura del destello estará dada por la siguiente fórmula: $h(t) = -5t^2 + 80t$, donde h es la altura sobre el nivel del mar, en metros, alcanzada por el proyectil luego de transcurrido un tiempo t, en segundos, desde el momento del disparo.

¿CUÁL ES EL DOMINIO Y LA IMAGEN DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA?

El dominio de la función cuadrática está formado por todos los números reales porque podemos evaluar la función en cualquiera de esos valores: $Dom(f) = \mathbb{R}$.
Si las gráficas que representan una función cuadrática son parábolas, que tienen un máximo o un mínimo en su vértice, ¿cómo sería la imagen?

- Si $f(x)$ es una función cóncava $\Rightarrow Im\,(f) = [y_v; \infty)$
- Si $f(x)$ es una función convexa $\Rightarrow Im(f) = (-\infty; y_v]$

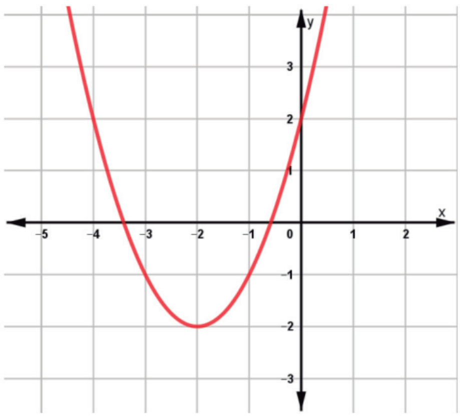
¿Por qué usamos corchetes?

EJEMPLO

En la función representada, tenemos:

$$Dom\,(f) = \mathbb{R}$$

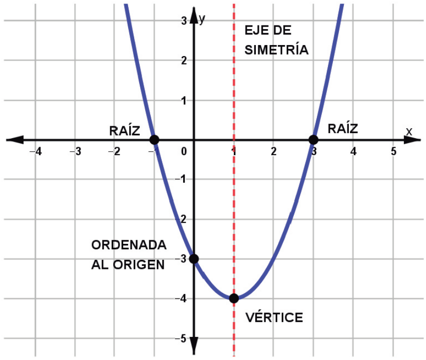
$$Im(f) = [-2; \infty)$$



¿CÓMO CONSTRUIR LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA A PARTIR DE SU FÓRMULA?

Para poder graficar una parábola basta con conocer algunos ELEMENTOS importantes en ella:

- Las raíces.
- El vértice.
- El eje de simetría.
- La ordenada al origen.



¿CÓMO RECONOCER O CALCULAR ESTOS ELEMENTOS A PARTIR DE LAS DIFERENTES FORMAS DE EXPRESIÓN?

Dependiendo de la forma en que esté expresada la función cuadrática podemos identificar algunos elementos; otros debemos calcularlos. Veamos:

El análisis de la concavidad es análogo en las tres formas de expresión.

FORMA CANÓNICA $f(x) = a\,(x - x_v)^2 + y_v$

∗ El coeficiente a indica la concavidad de la parábola.

- Si $a > 0$ la parábola es cóncava.
- Si $a < 0$ la parábola es convexa.

¿Por qué ocurrirá esto?

∗ x_v e y_v son las coordenadas del vértice $V = (x_v; y_v)$

∗ x_v determina la ecuación del eje de simetría $x = x_v$

∗ Debemos calcular las raíces y la ordenada al origen.

¿Cómo calcularían las raíces y la ordenada al origen?

EJEMPLO

Representemos gráficamente la siguiente función cuadrática escrita en forma canónica:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$$

¿Qué elementos de la gráfica identificamos a partir de esta expresión?

- $a = \frac{1}{2}$ $(a > 0)$, entonces la función es cóncava. Es decir, tendrá sus ramas hacia arriba.
- El vértice de la parábola es $V = (-3; -2)$
- La ecuación del eje de simetría es $x = -3$

Calculemos las **raíces** resolviendo la ecuación :

$$0 = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$$

$$2 = \frac{1}{2}(x+3)^2$$

$$4 = (x+3)^2$$

¿Por qué debemos igualar a cero la función para calcular las raíces?

$$\sqrt{4} = |x+3|$$

$$x + 3 = 2 \quad \wedge \quad x + 3 = -2$$

$\boxed{x = -1} \wedge \boxed{x = -5}$ Entonces, las raíces resultan $x_1 = -1 \quad \wedge \quad x_2 = -5$

Calculemos la **ordenada al origen**:

$$f(0) = \frac{1}{2}(0+3)^2 - 2$$

$$f(0) = \frac{1}{2}.9 - 2$$

$$\boxed{f(0) = \frac{5}{2}}$$

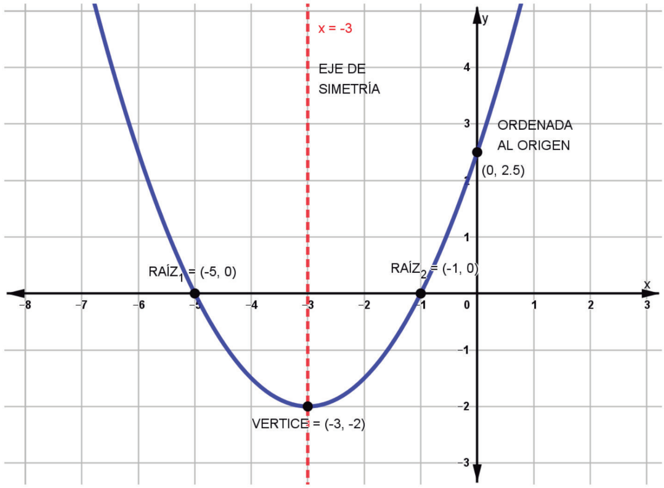
¿Por qué debemos evaluar la función en cero para calcular la ordenada al origen?

En síntesis, la información que tenemos sobre la parábola de la función $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$ es:

- Cóncava
- $V = (-3; -2)$
- Eje de simetría $x = -3$
- Raíces $(-1; 0)$ y $(-5; 0)$
- Ordenada al origen $\left(0; \frac{5}{2}\right)$
- $Im\ (f) : [-2; \infty)$

Con esta información, ¿pueden expresar la función en forma factorizada?

La gráfica de la función cuadrática quedaría así:



FORMA FACTORIZADA $f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$

- El coeficiente a indica la concavidad de la parábola.
- x_1 y x_2 son los ceros o raíces de la función.
- Debemos calcular el vértice y la ordenada al origen.

EJEMPLO

Estudiemos analíticamente la siguiente función cuadrática escrita en forma factorizada:

$$f(x) = -2(x-1)(x-3)$$

Veamos la información que brinda la fórmula sobre la gráfica:

- $a = -2$ $(a < 0)$, entonces la parábola es convexa. Es decir, tiene las ramas hacia abajo.
- Las raíces son $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$

Para calcular la **coordenada "x" del vértice** basta con calcular el punto medio entre las raíces, porque son un par de puntos simétricos.

Es decir, $x_v = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$

Luego, calculamos la **coordenada "y" del vértice** evaluando la función en x_v, es decir, en 2:

$$f(2) = -2 \cdot (2-1) \cdot (2-3) = 2$$

Calculamos la **ordenada al origen** evaluando la función en 0:

$$f(0) = -2 \cdot (0 - 1) \cdot (0 - 3) = -6$$

Los invitamos a completar con la información que calculamos sobre la parábola de la función

$$f(x) = -2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$$

Cóncava o convexa: ....
Raíces: ....
Vértice: ....
Eje de simetría: ....
Ordenada al origen: ....
Imagen: ....

Con esta información, ¿pueden expresar la función en forma canónica?

Les proponemos realizar con lápiz y papel la gráfica de la función que analizamos, luego pueden usar geogebra para compararla.

FORMA POLINÓMICA $f(x) = ax^2 + bx + c$

- El coeficiente a indica la concavidad de la parábola.
- El coeficiente c es la ordenada al origen, pues, al evaluar la función en $x = 0$, resulta $f(0) = c$.
- Debemos calcular las raíces y las coordenadas del vértice.

Recordemos que si la expresión está completa $(a, b, c \neq 0)$, para calcular los ceros de la función debemos resolver la ecuación $f(x) = 0$, para lo cual utilizamos la **fórmula resolvente** (fórmula de Bhaskara).

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

¿Saben cómo se obtuvo esta fórmula?

Para calcular el vértice es válido seguir el procedimiento de tomar el punto medio entre las raíces y evaluarlo en la función.
También podemos utilizar la fórmula $x_v = -\frac{b}{2.a}$ para calcular la coordenada *x* del vértice y luego encontrar y_v haciendo $f(x_v)$.

Les proponemos analizar y representar gráficamente la función $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

¿Cómo se obtiene la fórmula $x_v = -\frac{b}{2.a}$?

Si logramos calcular las coordenadas x de dos puntos simétricos, podremos obtener la coordenada x_v que estará justo en el medio de ellos. Como la fórmula está expresada en forma polinómica, contamos con la ordenada al origen $(0; c)$, entonces buscaremos la coordenada x del simétrico de la ordenada al origen que tiene la misma imagen c.

Simbólicamente, implica plantear y resolver la siguiente ecuación: $x^2 + bx + c = c$

Restando c en ambos miembros

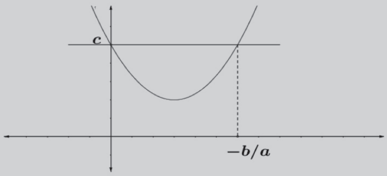
$$ax^2 + bx = 0$$

Sacando factor común x

$$x(ax + b) = 0$$

Para que este producto de dos factores dé cero, alguno de los dos debe ser cero:

$$x = 0 \text{ ó } ax + b = 0 \implies x = 0 \text{ ó } x = -\frac{b}{a}$$



Los valores simétricos para $y = c$ son $x = 0$ ó $x = -\frac{b}{a}$; entonces, la coordenada x del vértice se encuentra en el medio de ellos:

$$x_v = \frac{0 + \left(-\frac{b}{a}\right)}{2} \implies \boxed{x_v = -\frac{b}{2a}}$$

Conclusión: Las coordenadas del vértice de una parábola son: $V = \left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

¿En qué forma está expresada cada una de las siguientes funciones?

$f(x) = \frac{2}{3}(x + 5)^2$ $\quad$ $g(x) = 2x^2$ $\quad$ $h(x) = -x^2 - 1$

Notemos que en cada una de las funciones propuestas podemos reconocer más de una forma de expresión. De esta manera, podemos identificar más elementos de la parábola sin realizar cálculos.
Por ejemplo, $f(x) = \frac{2}{3}(x+5)^2$ está expresada en forma canónica y en forma factorizada. ¿Qué elementos de la parábola nos permite identificar?

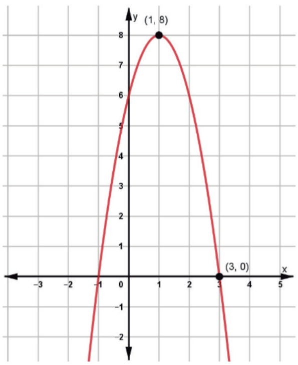
¿Qué elementos de la parábola se pueden identificar en $g(x)$ y $h(x)$?

¿CÓMO CONSTRUIR UNA FÓRMULA A PARTIR DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA?

Para encontrar la ecuación de la parábola que se observa en la gráfica, notemos que ella tiene vértice en el punto exacto $(1; 8)$. Entonces, reemplazando en la forma canónica, tenemos:

$$y = a(x-1)^2 + 8$$

Para encontrar el coeficiente "a" elegimos otro punto exacto por el que pase la curva, por ejemplo, el $(3; 0)$. Entonces, se satisface en la expresión anterior que:



$$0 = a(3-1)^2 + 8$$

$$0 = a2^2 + 8$$

$$-8 = 4a$$

$$-\frac{8}{4} = a \quad \rightarrow a = -2$$

Luego, la ecuación de la parábola en forma canónica es:

$$\boxed{\boldsymbol{y = -2(x-1)^2 + 8}}$$

A partir de los elementos visibles de la gráfica ¿pueden construir otra fórmula? equivalente?

SISTEMA DE ECUACIONES MIXTOS

Ya hemos estudiado cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, pero… ¿cómo resolveríamos un sistema de ecuaciones mixto? Es decir, ¿cómo resolveríamos un sistema que tiene la siguiente forma?:

El parámetro "b" difiere en ambas funciones. Son letras que se utilizan para generalizar.

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + b \end{cases}$$

Es un sistema mixto porque incluye ecuaciones de distinto tipo.

Sabemos que resolver un sistema de ecuaciones es encontrar el o los puntos de intersección (si existen) entre ambas funciones. Podemos calcular estos puntos en forma analítica o en forma gráfica utilizando los métodos que ya se explicaron para sistemas lineales.

EJEMPLO

Encontremos de forma analítica y gráfica las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones mixto.

$$\begin{cases} y - 1 = 2x \\ y - 5 + x = -x^2 \end{cases}$$

Resolvamos por el **método de igualación**. ¿Qué incógnita les parece más conveniente despejar? Como también nos piden resolver por el método gráfico, nos conviene despejar la incógnita y.

> Para realizar la gráfica de las funciones necesitamos que estén en forma explícita.

Entonces de la ecuación $y - 1 = 2x$ obtenemos:

$$y = 2x + 1 \qquad \textbf{(1)}$$

Y de la ecuación $y - 5 + x = x^2$ obtenemos:

$$y = x^2 - x + 5 \qquad \textbf{(2)}$$

Con lo cual podemos igualar **(1)** y **(2)** y obtenemos la siguiente expresión:

$$-x^2 - x + 5 = 2x + 1$$

Igualamos a cero agrupando los términos semejantes para resolver esta ecuación cuadrática

$$-x^2 - x + 5 - 2x - 1 = 0$$
$$-x^2 - 3x + 4 = 0$$

Y aplicando la fórmula resolvente obtenemos $x_1 = -4$ y $x_2 = 1$

Hallamos las coordenadas *x* de las soluciones. ¿Cómo podemos calcular las coordenadas y?

Reemplazamos los valores encontrados en cualquiera de las dos ecuaciones dadas y obtenemos:

$$y - 1 = 2x \qquad\qquad y - 1 = 2x$$

$$y = 2x + 1 \qquad\qquad y = 2x + 1$$

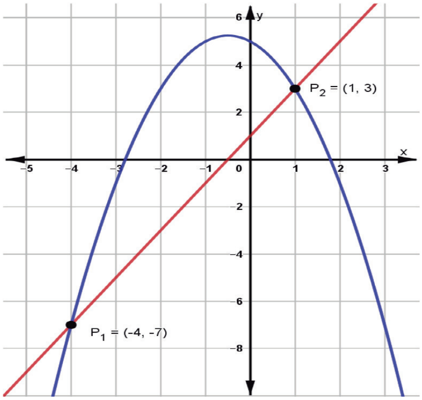
$$y = 2(-4) + 1 \qquad\qquad y = 2 \cdot 1 + 1$$

$$y = -7 \qquad\qquad y = 3$$

Entonces, las soluciones obtenidas, o **puntos de corte** entre las curvas, son:

$$S = \{(-4; -7); (1; 3)\}$$

Para realizar la **representación gráfica del sistema** tomamos **(1)** y **(2)** y construimos sus gráficas.
Para la gráfica de la función lineal $y = 2x + 1$ podemos usar la ordenada al origen y la pendiente como trabajamos en el capítulo anterior.
Para la gráfica de la función cuadrática $y = -x^2 - x + 5$ debemos hallar todos los puntos notables de la parábola.
Por lo tanto, la gráfica queda de la siguiente manera:



En este caso, el sistema de ecuaciones mixto tiene dos soluciones que coinciden con los cálculos analíticos.

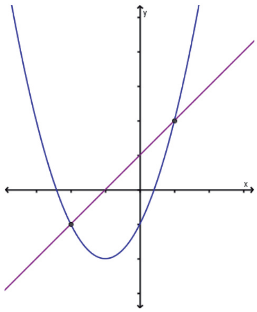
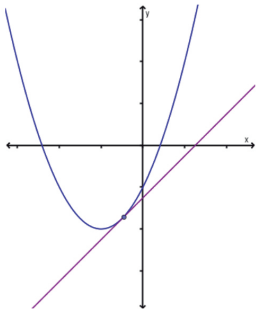
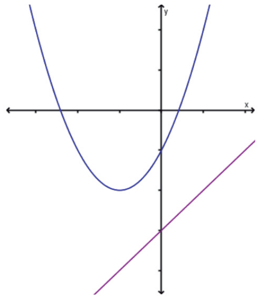
¿Siempre podremos encontrar dos soluciones?

¿CÓMO PODREMOS DETERMINAR LA CANTIDAD DE SOLUCIONES QUE TENDRÁ UN SISTEMAS DE ECUACIONES MIXTO?

Podemos reconocer cuántas soluciones tiene un sistema mixto analizando el discriminante de la ecuación cuadrática que surge al resolver el sistema por el método de igualación o sustitución.
En el ejemplo anterior obtuvimos dos soluciones y el discriminante era $\Delta=25$ que es un número positivo, es decir, mayor a cero.

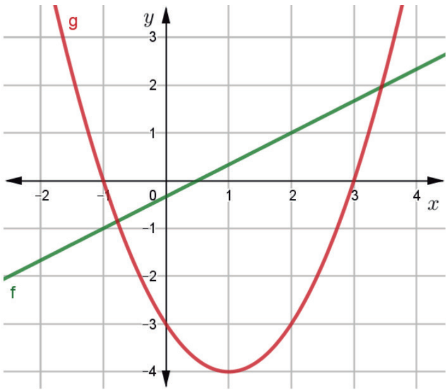
El valor que se encuentra dentro del radical, en la fórmula resolvente, recibe el nombre de discriminante y se simboliza de la siguiente manera:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

Si $\Delta > 0$ El sistema tiene dos soluciones distintas (Dos puntos de corte)	Si $\Delta = 0$ El sistema tiene una solución (Un punto de corte)	Si $\Delta < 0$ El sistema no tiene soluciones (Ningún punto de corte)
		
La recta es secante a la parábola.	La recta es tangente a la parábola.	La recta no corta a la parábola.

EJEMPLO

Encontremos de forma analítica los puntos de corte entre las siguientes curvas y representemos la solución de forma gráfica:



En primer lugar, tenemos que encontrar la ecuación que representa cada una de las curvas:

Ecuación de la Parábola:

Las raíces de la parábola están visibles y se encuentran en $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$. Reemplazando esto en la forma factorizada nos queda:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = a(x + 1)(x - 3)$$

Luego, para encontrar el valor del coeficiente a, consideramos algún punto exacto por el cual pase la curva, por ejemplo, el punto $(2; -3)$. Reemplazando en la última ecuación, tenemos:

$$-3 = a(2+1)(2-3)$$

$$-3 = a3(-1)$$

$$-3 = -3a$$

$$a = \frac{-3}{-3} \quad \rightarrow \quad a = 1$$

Finalmente, la ecuación de la parábola queda:

$$\boxed{\boldsymbol{y = (x+1)(x-3)}}$$

<u>Ecuación de la Recta:</u>

La ecuación general de una recta es $y = ax + b$

De la gráfica observamos que la recta pasa en forma exacta por los puntos $(2; 1)$ y $(-1; -1)$, entonces podemos calcular la pendiente "a" de la siguiente manera:

$$a = \frac{-1-1}{-1-2}$$

$$a = \frac{-2}{-3} \rightarrow \quad a = \frac{2}{3}$$

Reemplazando la pendiente en la ecuación, resulta:

$$y = \frac{2}{3}x + b$$

Luego para calcular la ordenada al origen "b", cualquiera de los dos puntos anteriores satisfacen la ecuación (por pertenecer a la recta), entonces tomando por ejemplo $(2; 1)$ y reemplazando tenemos:

$$1 = \frac{2}{3}2 + b$$

$$1 - \frac{4}{3} = b \quad \rightarrow \quad b = -\frac{1}{3}$$

Finalmente, la ecuación de la recta resulta:

$$\boxed{\boldsymbol{y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}}$$

Para encontrar de forma analítica los puntos de corte entre la parábola y la recta planteamos un sistema con las ecuaciones que previamente calculadas:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y = (x+1)(x-3)} & \boldsymbol{(1)} \\ \boldsymbol{y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}} & \boldsymbol{(2)} \end{cases}$$

Resolvamos por el **método de igualación** planteando $(1) = (2)$, ya que en ambas ecuaciones se encuentra la incógnita "y" de forma explícita:

$$(x+1)(x-3) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

Usamos la propiedad distributiva en el primer miembro:

$$x^2 - 2x - 3 = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$x^2 - 2x - 3 - \frac{2}{3}.x + \frac{1}{3} = 0$$

$$x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{8}{3} = 0$$

Utilizamos la **fórmula resolvente** y obtenemos como solución de esta última ecuación las coordenadas de los puntos de corte:

$$x_1 = \frac{4+2\sqrt{10}}{3} \cong 3{,}44 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{4-2\sqrt{10}}{3} \cong -0{,}77$$

Luego, encontramos la coordenada para reemplazar los valores encontrados en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema. Por ejemplo, reemplazando en la ecuación (2) resulta:

Para $x_1 \cong 3{,}44$

$$y_1 = \frac{2}{3}3{,}44 - \frac{1}{3} = \quad \rightarrow \quad y_1 = 1{,}96$$

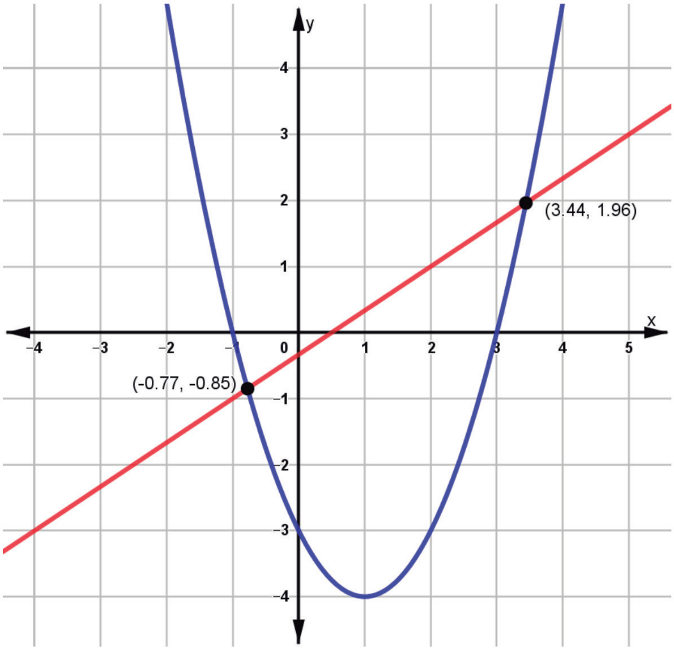
Para $x_2 \cong -0{,}77$

$$y_2 = \frac{2}{3}(-0{,}77) - \frac{1}{3} = \quad \rightarrow \quad y_2 = -0{,}85$$

Finalmente, el conjunto solución de los **puntos de corte** entre las curvas resulta:

$$S = \{(\mathbf{3{,}44};\ \mathbf{1{,}96})\ ;\ (\mathbf{-0{,}77};\ \mathbf{-0{,}85})\}$$

Gráficamente, representamos las soluciones encontradas de la siguiente manera:



CAPÍTULO 5

FUNCIONES Y ECUACIONES RACIONALES

Las funciones racionales son aquellas del tipo $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, siendo $Q(x)$ distinto del Polinomio Nulo. Estas funciones, al igual que las polinómicas, son funciones algebraicas.

¿CUÁL ES EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN RACIONAL?

Como podemos observar en la expresión anterior, la función $f(x)$ es un cociente entre dos polinomios con dominio real. Pero la división por cero no está definida, entonces debemos asegurarnos que el polinomio denominador no sea cero.
En símbolos:

$$Q(x) \neq 0.$$

Entonces $Dom\ (f) = \mathbb{R} - \{x_1; \ldots; x_n\}$ con $x_1, \ldots\ x_n$ raíces del polinomio $Q(x)$.
En este capítulo sólo abordaremos dos tipos de funciones racionales: funciones inversamente proporcionales y funciones homográficas.

Se desea envasar 120 litros de aceite en botellas de igual capacidad. La cantidad de botellas que se necesitarán depende de la capacidad de cada botella. Les proponemos completar la siguiente tabla:

Capacidad de cada botella (l)	Cantidad total de botellas	Total de litros de aceite
1	120	
2		
3		
5		
1/2		
3/2		

A) Encontrar una expresión que represente la cantidad total de botellas en función de su capacidad.
B) Mostrar cómo varía la cantidad de botellas en función de la capacidad de cada una en un gráfico en coordenadas cartesianas.

¿Cuál es el dominio de la función que representa el problema anterior? ¿Por qué?

¿A QUÉ LLAMAMOS FUNCIÓN INVERSAMENTE PROPORCIONAL?

Dos variables (una independiente x y una dependiente y) son **inversamente proporcionales** si el producto de los valores respectivos de cada una de ellas es una constante k, siendo $k \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$x \cdot y = k$$

Esta relación de proporcionalidad inversa se puede representar mediante una función de la forma:

$$y = \frac{k}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{k}{x}$$

Esta es una función racional en la que $P(x) = k$ y $Q(x) = x$

¿Cuál es el dominio de esta función?

EJEMPLO

Analicemos la función: $f(x) = \frac{2}{x}$

Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Calculemos las **raíces** resolviendo la ecuación $f(x) = 0$:

$\frac{2}{x} = 0$ No tiene solución en R.

Por lo tanto, $f(x)$ no tiene raíces reales.

Calculemos la **ordenada al origen**:
La hallamos evaluando la función en $x = 0$ pero ese valor no pertenece al dominio ($0 \notin Dom(f)$).
Entonces la función no tiene ordenada al origen.

¿La gráfica de la función corta los ejes cartesianos?

Pensemos en la **Imagen**: Como la función no tiene raíces, entonces ella resulta siempre distinta de cero. Por lo tanto, $Im(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

¿Cómo podemos graficar la función?

Podemos ayudarnos construyendo una tabla de valores:

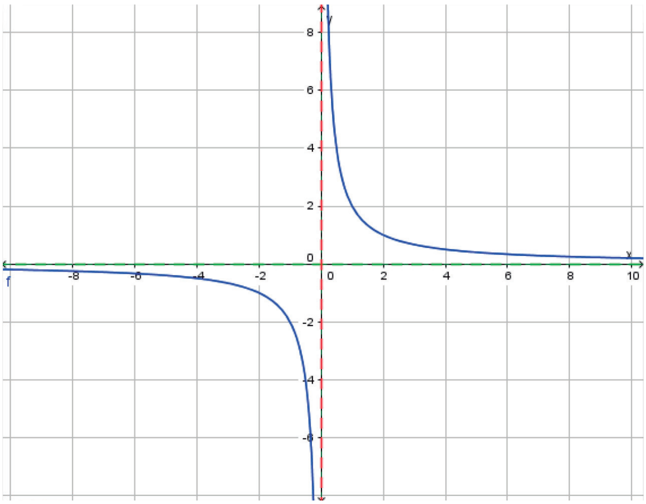
x	$f(x) = \frac{2}{x}$
-1000	-0,002
-100	-0,02
-10	-0,2
-5	-0,4
-1	-2
-0,5	-4
-0,25	-8
-0,005	-400
0,005	400
0,25	8
0,5	4
1	2
5	0,4
10	0,2
100	0,02
1000	0,002

¿Qué sucede con la función cuando le asignamos a la variable x valores positivos cada vez más grandes? ¿Y cuándo le asignamos valores negativos cada vez más pequeños?

¿Qué sucede si le asignamos a x valores cada vez más cercanos a cero "por derecha" (Por ejemplo $0{,}005$) y "por izquierda" (Por ejemplo $-0{,}005$)?

Podemos observar que a medida que le asignamos a la variable *x* valores positivos cada vez más grandes la función toma valores positivos cada vez más pequeños, es decir, "tiende" a cero por encima del eje x. Ahora, si le asignamos a x valores negativos cada vez más pequeños (por ejemplo: -10; -100; -1000) la función toma valores negativos y "tiende" a cero, pero por debajo del eje x.
Entonces, podemos decir que, a medida que los valores de la variable x "tienden" a infinito, la función "tiende" a cero. Cuando se da esta situación, decimos que la función tiene una **asíntota horizontal** en $y = 0$.

Por otro lado, cuando le asignamos a la variable valores próximos a cero por derecha (por ejemplo: $0{,}5$; $0{,}25$; $0{,}005$), la función toma valores cada vez más grandes, es decir, la función "tiende" a infinito. En cambio, cuando nos acercamos a cero por izquierda, la función toma valores cada vez más pequeños, la función "tiende" a infinito negativo.
Entonces, podemos decir que si la variable x "tiende" a cero la función "tiende" a infinito. Cuando se da esta situación, la función tiene una **asíntota vertical** en $x = 0$.
Si graficamos la función, obtenemos:



La gráfica de una función inversamente proporcional es una curva llamada **hipérbola**.

Les proponemos ver los siguientes videos donde es analizada la función del ejemplo anterior:
https://www.youtube.com/watch?v=ajkdJGy3EfE&t=8s
https://www.youtube.com/watch?v=BbOq77fLGy0&t=7s

ASÍNTOTAS VERTICALES DE UNA FUNCIÓN RACIONAL

Una recta vertical $x = a$ con $a \in \mathbb{R}$ se llama **asíntota vertical** de la función $f(x)$ si $a \notin Dom\ (f)$ y, a medida que x toma valores cada vez más cercanos a a, $|f(x)|$ toma valores cada vez mayores.

Para hallarla debemos analizar que el o los valores que no pertenecen al dominio NO anulen al numerador de la función. Porque si un valor anula tanto al numerador como al denominador, la función no presenta una asíntota en ese valor sino un **punto de discontinuidad**.

ASÍNTOTA HORIZONTAL DE UNA FUNCIÓN RACIONAL

Una recta horizontal $y = b$ con $b \in \mathbb{R}$ se llama **asíntota horizontal** de la función $f(x)$ si a medida que $|x|$ aumenta, $f(x)$ se acerca a b.

Para hallarla debemos tener en cuenta el grado del polinomio numerador $P(x)$ y el grado del polinomio denominador $Q(x)$.

De este modo, la Asíntota Horizontal resulta:

Si $Grado\ P(x) < Grado\ Q(x) \Longrightarrow AH: y = 0$

Si $Grado\ P(x) = Grado\ Q(x) \Longrightarrow AH: y = \frac{Coeficiente\ principal\ de\ P(x)}{Coeficiente\ principal\ de\ Q(x)}$

Si $Grado\ P(x) > Grado\ Q(x) \Longrightarrow No\ presenta\ AH$

Vamos a aceptar estas conclusiones porque su demostración excede este curso.

Una fábrica tiene como gasto fijo $\$25000$ para estar en funcionamiento. Si cada producto fabricado supone un gasto de $\$100$ adicional, por mano de obra y materiales, les proponemos resolver:

A. ¿Cuál será el costo de fabricación por x unidades?

B. ¿Cuál será la función que determine el costo por unidad? ¿Responde a una función inversamente proporcional? ¿Por qué?

C. El Gerente de la fábrica dice que cuantas más unidades fabriquen menos va a ser el costo por unidad, ¿es cierto? ¿Cómo podemos explicarlo?

¿A QUÉ LLAMAMOS FUNCIÓN HOMOGRÁFICA?

Llamaremos **Función Homográfica** a aquellas del tipo $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ donde c debe ser distinto de cero y $ad \neq bc$.

¿Por qué c debe ser distinto de cero?

En otras palabras, una función racional se denomina Homográfica si es el cociente entre dos polinomios de grado uno que no comparten raíces.

EJEMPLOS

- $f(x) = \frac{3x-1}{x}$; $Dom\ (f) = \mathbb{R} - \{0\}$
- $g(x) = \frac{2x-4}{5x+1}$; $Dom\ (g) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{5}\right\}$
- $h(x) = \frac{7x}{-3x+18}$; $Dom\ (h) = \mathbb{R} - \{6\}$

Recordemos que la división por cero no está definida

¿Qué elementos analizamos para graficar una función Homográfica?

En este curso, estudiamos las funciones homográficas analizando e identificando su dominio, las raíces y ordenada al origen, de poseer, las asíntotas verticales y horizontal, imagen, conjunto de positividad y negatividad e intervalos de crecimiento y de decrecimiento, acompañando el análisis con su representación gráfica.

EJEMPLO

Realicemos el estudio de la función racional homográfica $f(x) = \frac{5x+15}{4x-8}$

¿Qué podemos analizar?

Dominio:

$$4x - 8 = 0$$
$$x = 2$$
$$Dom\ (f) = \mathbb{R} - \{2\}$$

Ordenada al origen: $f(0) = \frac{5 \cdot 0+15}{4 \cdot 0-8} = -\frac{15}{8} \Rightarrow \left(0; -\frac{15}{8}\right)$

Raíz:

$$f(x) = 0$$
$$\frac{5x+15}{4x-8} = 0$$
$$5x + 15 = 0$$
$$x = -3 \Rightarrow \text{Raíz: } (-3; 0)$$

Asíntota vertical:
Como $x = 2$ no pertenece al dominio y no anula al numerador de la función, es una asíntota vertical.

AV: $x = 2$

Asíntota horizontal: Para hallar esta asíntota, dado que el polinomio numerador y denominador tienen igual grado, dividimos los coeficientes principales como lo hemos definido antes.
En este caso nos queda:

AH: $y = \frac{5}{4}$

Conjuntos de positividad y negatividad: Teniendo en cuenta el dominio de la función $Dom\ (f) = \mathbb{R} - \{2\}$ y la raíz $x = -3$, establecemos los intervalos de análisis. Luego, elegimos un valor cualquiera de x que pertenezca a cada intervalo para evaluar la función en ese valor y establecer el signo.

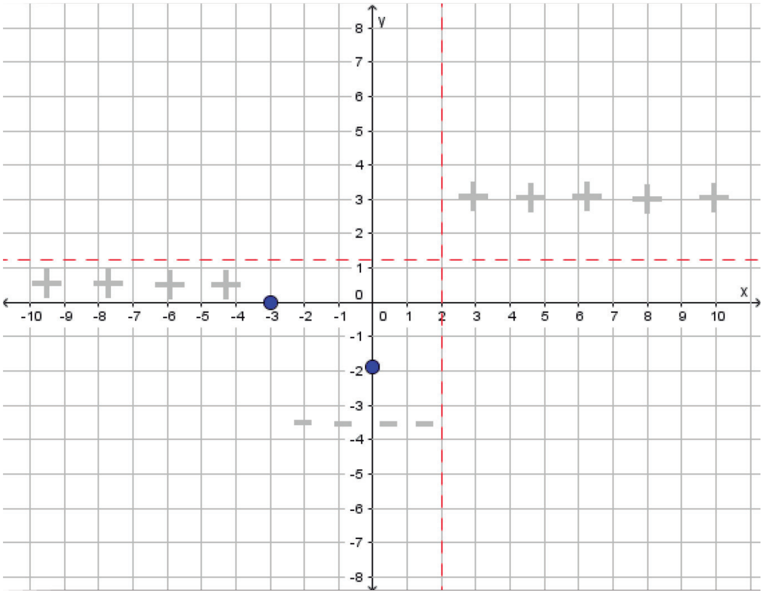
Intervalos	$(-\infty; -\mathbf{3})$	$(-\mathbf{3};, \mathbf{2})$	$(\mathbf{2}; \infty)$
$\boldsymbol{x}$	-5	-1	5
$\boldsymbol{f(x)}$	$f(-5) = \dfrac{5}{14}$	$f(-1) = -\dfrac{5}{6}$	$f(5) = \dfrac{10}{3}$
Signos	Positivo	Negativo	Positivo

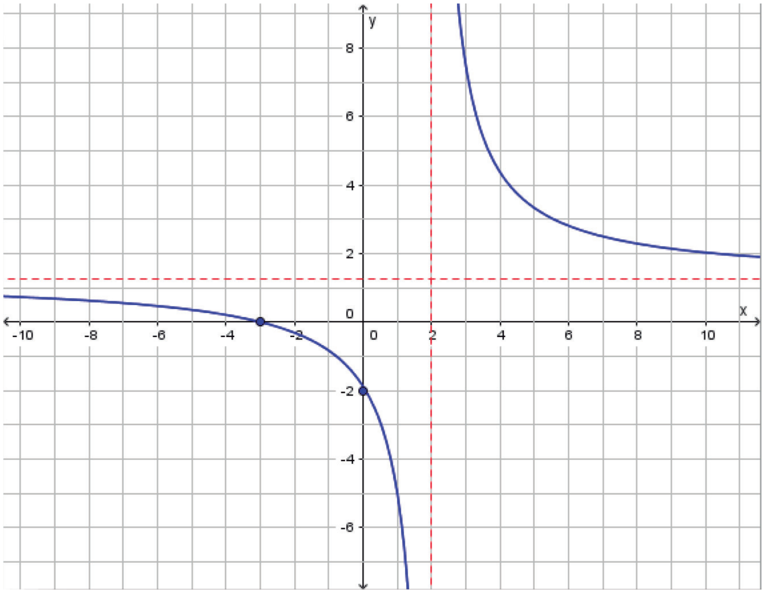
Ahora podemos determinar los conjuntos:

$$C^+ = (-\infty; -3) \cup (2; \infty)$$

$$C^- = (-3; 2)$$

Marquemos en el plano cartesiano lo que hemos hallado, luego graficamos la función.





A partir del gráfico podemos determinar:

Imagen: $Im(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{4}\right\}$

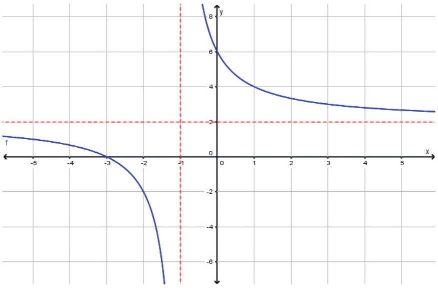
Intervalos de crecimiento: No presenta.
Intervalo de decrecimiento: $\mathbb{R} - \{2\}$ la función es **decreciente en todo su dominio**, porque a medida que recorremos cada rama tomando valores cada vez más grandes para x, la función toma valores cada vez más pequeños.

¿CÓMO CONSTRUIR UNA FÓRMULA A PARTIR DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN HOMOGRÁFICA?

Para encontrar la fórmula de esta función vamos a utilizar la siguiente expresión:

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = \frac{k}{x - c} + d}}$$

donde $\boldsymbol{k, c, y\ d \in \mathbb{R}\ y\ k \neq 0}$



Debemos encontrar el valor de los parámetros $\boldsymbol{k, c}$ y $\boldsymbol{d}$ considerando que:
$\boldsymbol{c}$**:** se asocia con la Asíntota Vertical (AV)
$\boldsymbol{d}$**:** se asocia con la Asíntota Horizontal (AH)
En este ejemplo, se observa desde la gráfica que:

AV: $x = -1$ → $c = -1$
AH: $y = 2$ → $d = 2$

Reemplazamos estos valores en la expresión original y resulta:

$$f(x) = \frac{k}{x-(-1)} + 2 \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{k}{x+1} + 2$$

Para completar la expresión buscamos el valor del parámetro $\boldsymbol{k}$ tomando cualquier punto exacto que pertenezca a la curva, por ejemplo el punto $(1; 4)$. Luego reemplazamos las coordenadas x e y de este punto en la expresión anterior:

$$4 = \frac{\mathrm{k}}{1+1} + 2$$
$$4 - 2 = \frac{\mathrm{k}}{2}$$
$$2 = \frac{k}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{k = 4}$$

Finalmente, reemplazando el valor de $\boldsymbol{k}$, obtenemos la expresión de la función homográfica:

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = \frac{4}{x+1} + 2}}$$

¿Cómo sabemos si la expresión que encontramos es correcta?

Para comprobar que la expresión encontrada es correcta, tomamos cualquier otro punto exacto de la curva (distinto al punto elegido para encontrar $\boldsymbol{k}$) y verificamos que sus coordenadas satisfacen dicha expresión:
Por ejemplo, si tomamos el punto $(-2; -2)$ y reemplazamos:

$$-2 = \frac{4}{-2+1} + 2$$

$$-2 = \frac{4}{-1} + 2$$

$$-2 = -2 \rightarrow ¡Se\ verifica!$$

Entonces, la expresión que encontramos es correcta.

Les proponemos que analicen en la función homográfica anterior: dominio, imagen, ordenada al origen y raíz, intervalos de crecimiento y decrecimiento, conjuntos de positividad y negatividad.

CAPÍTULO 6

FUNCIONES Y ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Retomemos la actividad del bloque de numeros reales (página 10)
La Hidra era un monstruo con 1 cabeza, pero si se le cortaba, le nacían 2 cabezas en su lugar. Si un héroe intentaba vencerla cortándole todas sus cabezas cada día, ¿cuántas cabezas tendría la Hidra el tercer día? ¿Y al cabo de 10 días intentando vencerla? ¿Existe alguna expresión que permita calcular la cantidad de cabezas en función de los cortes realizados?

¿A QUÉ LLAMAMOS FUNCIÓN EXPONENCIAL?

La expresión que permite calcular la cantidad de cabezas de la Hidra es $C(d) = 2^d$ y podemos deducirla de la siguiente tabla:

Cantidad de días d	0	1	2	3	10	d
Cantidad de cabezas $C(d)$	$1 = 2^0$	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$	$1024 = 2^{10}$	2^d

La fórmula genérica de la **Función Exponencial** es de la forma:

$$f(x) = a^x$$

donde a se denomina base, con $a > 0 \wedge a \neq 1$.

El dominio de la función exponencial son todos los valores reales $\boldsymbol{Dom\ (f) = \mathbb{R}}$, ya que x es un exponente y admite cualquier valor real.
La función tiene por imagen el conjunto $\boldsymbol{Im(f) = (0;\infty)}$ y la gráfica tiene una **asíntota horizontal en** $y = 0$.

¿Por qué la gráfica tendrá una asintota horizontal en $y = 0$?

¿POR QUÉ EL PARÁMETRO a DEBE CUMPLIR ESAS CONDICIONES?

Debemos probar que es necesario que $a > 0 \wedge a \neq 1$.
Supongamos que pasa lo contrario, que $a < 0$. Entonces, aplicando las propiedades de la potencia, sabemos que, si elevamos a potencia par, el resultado es siempre positivo; en cambio, si elevamos a potencia impar, el resultado posee el mismo signo de la base, negativo. Por ejemplo:
Tomemos $a = -2$, entonces.

$$(-2)^0 = 1,\ (-2)^1 = -2,\ (-2)^2 = 4,\ (-2)^3 = -8,\ \ldots$$

Así queda una función oscilante. ¿Pero qué sucede con las potencias fraccionarias? Por definición sabemos qué $\sqrt[m]{a^p} = a^{\frac{p}{m}}$. Entonces, por ejemplo:
$(-2)^{\frac{1}{2}}$ no tiene solución, ya que $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ no existe.
De esta manera, vemos que la base no puede ser **negativa**.
Con igual razonamiento prueben que la base no puede valer cero ni uno.

Les proponemos que asocien cada situación con una de las funciones que se muestran más abajo. Expliquen esas asociaciones.

- Cada año que transcurre, los impuestos sufren un aumento del 15%.
- El precio de mi auto se desvaloriza cada año un 5%.
- Una sustancia pierde el 27% de su masa cada año.

$f(x) = 0{,}95^x$ $\qquad g(x) = 1{,}15^x$ $\qquad h(x) = 0{,}73^x$ $\qquad j(x) = 0{,}27^x$

EJEMPLOS: RETOMEMOS LAS SITUACIONES ANTERIORES

- Cada año que transcurre, los impuestos sufren un aumento del 15%.
  La fórmula que corresponde a esta situación es $g(x) = 1{,}15^x$ porque $a = \frac{100 \overbrace{+}^{interés} 15}{100} = 1{,}15$ equivalente a 115%

- El precio de mi auto se desvaloriza cada año un 5%.
  La fórmula que corresponde a esta situación es $f(x) = 0{,}95^x$ porque $a = \frac{100 \overbrace{-}^{desvaloriza} 0{,}5}{100} = 0{,}95$ equivalente a 95%

- Una sustancia pierde el 27% de su masa cada año.
  La fórmula que corresponde a esta situación es $h(x) = 0{,}73^x$ porque $a = \frac{100 \overbrace{-}^{pierde} 0{,}27}{100} = 0{,}73$ equivalente a 73%

FUNCIÓN EXPONENCIAL Y PORCENTAJE

El parámetro a indica si la función es **creciente o decreciente** y podemos calcularlo de la siguiente manera:

$$a = \frac{100 \pm p}{100} = 1 \pm \frac{p}{100}$$

Donde p indica el porcentaje de incremento o disminución que sufre la función.

En el Banco “Ciudad”, se obtiene una tasa de interés anual del $19{,}5\%$ por colocación de dinero en plazo fijo. Ana coloca un capital inicial de $\$5.000$. ¿Cuál será la expresión que permita calcular el dinero D (en miles) que hay en el Banco en función del tiempo t (en años) que transcurren?

FUNCIÓN EXPONENCIAL DE LA FORMA $f(x) = k \cdot a^x$

La expresión que permite calcular la cantidad de dinero (en miles) en función del tiempo (en años) viene dada por $D(t) = 5 \cdot 1{,}195^t$ y podemos deducirla de la siguiente tabla:

Cantidad de años t	0	1	2	10	t
Cantidad de dinero $D(t)$	$5 = 5^0$	$5{,}975 = 5 \cdot 1{,}195^1$	$7{,}140125 = 5 \cdot 1{,}195^2$	$29{,}6926 = 5 \cdot 1{,}195^{10}$	$D(t) = 5 \cdot 1{,}195^t$

Se define a la función exponencial mediante la fórmula: $\boldsymbol{f(x) = k \cdot a^x}$ donde el parámetro $\boldsymbol{k}$ indica el valor inicial.

Este parámetro debe ser distinto de cero, es decir, $k \neq 0$. ¿Por qué?

CRECIMIENTO Y DECRECIEMIENTO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

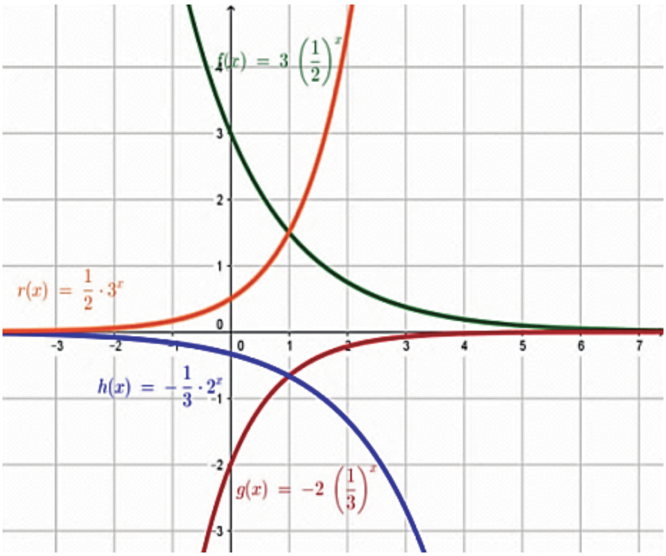
El comportamiento de la función exponencial no sólo se determina por el valor numérico del parámetro $\boldsymbol{a}$ sino que también es afectado por el parámetro $\boldsymbol{k}$:

$$Sí \quad a > 1 \wedge k > 0 \vee 0 < a < 1 \wedge k < 0 \Rightarrow f(x) \text{ es creciente}$$

$$Sí \quad a > 1 \wedge k < 0 \vee 0 < a < 1 \wedge k > 0 \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente}$$

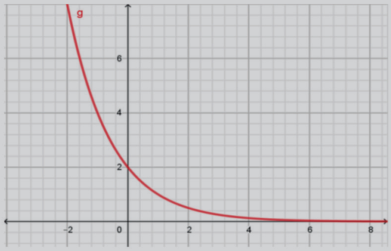
¿Por qué?

EJEMPLOS



Función	k		a		
$h(x)=-\frac{1}{3}\cdot 2^x$	$-\frac{1}{3}$	Negativo $(k<0)$	2	Mayor que 1 $(a>1)$	Decrece
$f(x)=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$	3	Positivo $(k>0)$	$\frac{1}{2}$	Menor que 1 $(0<a<1)$	Decrece
$g(x)=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$	-2	Negativo $(k<0)$	$\frac{1}{3}$	Menor que 1 $(0<a<1)$	Crece
$r(x)=\frac{1}{2}\cdot 3^x$	$\frac{1}{2}$	Positivo $(k>0)$	3	Mayor que 1 $(a>1)$	Crece

¿Cómo se modifica la gráfica de $f(x)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$ si se le suma o resta un valor constante b?



FUNCIÓN EXPONENCIAL DE LA FORMA $f(x) = k \cdot a^x + b$

El parámetro b, de la fórmula $f(x) = k \cdot a^x + b$, indica el desplazamiento vertical que sufre la función $f(x) = k \cdot a^x$.

Si $b > 0 \Rightarrow$ la función se desplaza b lugares hacia arriba.
Si $b < 0 \Rightarrow$ la función se desplaza b lugares hacia abajo.

¿Qué sucede si $b = 0$?

El conjunto imagen se define:

Sí $k > 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f = (b;\infty)$

Sí $k < 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f = (-\infty;b)$

e es un número real muy importante! Al igual que el número π y el número áureo δ, es un número irracional, no se puede expresar mediante una razón de dos números enteros. Tiene su propia tecla en la calculadora y su valor (con sus primeras cifras decimales) es el siguiente:

$e \cong 2{,}71828182845904523536...$

Te invitamos a buscar y ver en YouTube el video ¿qué es el número e? De derivando https://www.youtube.com/watch?v=Z5czpA-fyMU

$f(x) = e^x$ ¿es una función creciente o decreciente? ¿Por qué?

FUNCIÓN EXPONENCIAL DE LA FORMA $f(x) = k \cdot a^{x-c} + b$

Si analizamos la expresión aplicando las propiedades de la potenciación, obtenemos:

$$\boldsymbol{f(x) = k \cdot a^{x-c} + b = k \cdot a^{x} \cdot a^{-c} + b = \underbrace{k \cdot a^{-c}}_{nueva\ constante\ k'} \cdot a^{x} + b = k' \cdot a^{x} + b}$$

ESTUDIO COMPLETO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Recordemos que el estudio de toda función consiste en determinar:

- Dominio
- Imagen
- Raíz / Raíces
- Ordenada al Origen
- Intervalo de Crecimiento y Decrecimiento.
- Conjunto de Positividad y Negatividad

Veamos un ejemplo de Función exponencial:

EJEMPLO

Sea la función $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 3$.

- Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R}$
- Parámetros: $k = 4$, $a = \frac{1}{2}$ y $b = -3$.
- Imagen: $Im(f) = \mathbb{R}_{>-3} = (-3; \infty)$
- Ordenada al origen: $(0; 1)$

$$f(0) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0} - 3$$

$$f(0) = 4 \cdot 1 - 3$$

$$f(0) = 4 - 3$$

$$f(0) = 1$$

- Función decreciente $(k > 0 \ \wedge a < 1)$.
- Ecuación de asíntota horizontal $y = -3$
- Raíz: $(0{,}42; 0)$

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 3 = 0$$

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x} = 3$$

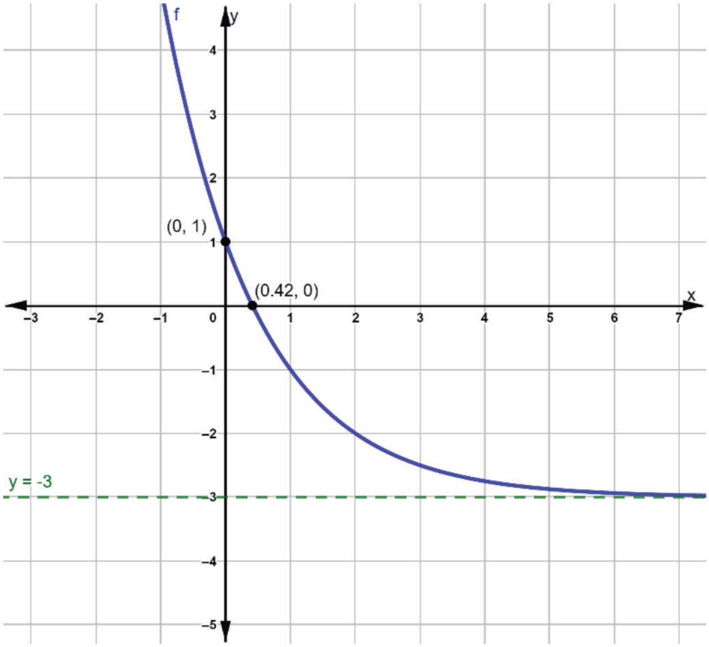
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = \frac{3}{4}$$

$$log\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = log\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$x \cdot log\left(\frac{1}{2}\right) = log\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$x = \frac{log\left(\frac{3}{4}\right)}{log\left(\frac{1}{2}\right)} \cong 0{,}42$$

- Conjunto de Positividad: $C^{+} = (-\infty; 0.42)$
- Conjunto de Negatividad: $C^{+} = (0.42; \infty)$



¿Cuántos años deben transcurir para que Ana tenga en su cuenta $\$17400$ aproximadamente?

ECUACIONES EXPONENCIALES

Para resolver ecuaciones cuya incógnita se encuentra en el exponente, debemos utilizar una de las operaciones inversas de la potencia, estudiada en el capítulo de Números Reales: **LOGARITMO.**

EJEMPLOS

1. Para determinar cuántos años deben transcurrir, aproximadamente, para que Ana tenga en su cuenta $17400, debemos resolver la siguiente ecuación:

$$5 \cdot 1{,}195^{x} = 17{,}4 \Longrightarrow 1{,}195^{x} = \frac{17{,}4}{5}$$

Podemos resolverla de dos maneras:

- aplicando logaritmo en ambos miembros de la igualdad
- aplicando la definición de logaritmo

Aplicando logaritmo en ambos miembros	Aplicando la definición de logaritmo
$log\ 1{,}195^x = log\left(\frac{17{,}4}{5}\right)$	$1{,}195^x = \frac{17{,}4}{5}$
$x \cdot log\ 1{,}195 = log\left(\frac{17{,}4}{5}\right)$	$x = log_{1{,}195}\left(\frac{17{,}4}{5}\right)$
$x = \frac{log\left(\frac{17{,}4}{5}\right)}{log(1{,}195)}$	$x \cong 7$
$x \cong 7$	

Deberán transcurrir 7 años para que Ana tenga en su cuenta aproximadamente \$17400 en su cuenta.

2. Para aplicar logaritmo, debe estar explícita la base, el exponente y el valor resultado. De no estarlo, debemos despejar todo lo que sea necesario.

$$-6 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x = -246$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = -246 : (-6)$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = 41 \Leftrightarrow log_{\frac{2}{5}}\ 41 = x$$

$$\frac{log\ 41}{log\left(\frac{2}{5}\right)} = x$$

$$-4{,}053 \cong x$$

¿Cómo podemos resolver la siguiente ecuación $\frac{4}{3} \cdot 2^x + 3 \cdot 2^x = 26$?

EJEMPLOS

1.

$$\underbrace{2 \cdot 4^x + \frac{3}{2} \cdot 4^x}_{\substack{Los\ términos\ son \\ semejantes}} = 56$$

$$\underbrace{\left(2 + \frac{3}{2}\right) \cdot 4^x}_{Sacando\ factor\ común} = 56$$

$$\frac{7}{2} \cdot 4^x = 56$$

$$4^x = 56 : \frac{7}{2}$$

$$4^x = 16$$

$$\log 4^x = \log 16$$

$$x . \log 4 = \log 16$$

$$x = \frac{\log 16}{\log 4}$$

$$x = 2$$

Verifiquemos si el valor obtenido es correcto:

$$\mathbf{2 \cdot 4^2 + \frac{3}{2} \cdot 4^2 = 32 + 24 = 56}$$

2. $\underbrace{7 \cdot 2^{x-1} - 2^{x+2} = -}_{No\ son\ términos\ semejantes}\ 10$

Tienen misma base, pero los exponentes son distintos, y eso hace que los términos no sean semejantes. Aplicando propiedades de la potenciación, podremos convertirlos en términos semejantes:

$$7 \cdot 2^{x-1} - 2^{x+2} = -10$$

$$\underbrace{7 \cdot 2^x \cdot 2^{-1} - 2^x \cdot 2^2}_{propiedades\ de\ la\ potencia} = -10$$

$$7 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{2} - 2^x \cdot 4 = -10$$

$$\underbrace{\frac{7}{2} \cdot 2^x - 4 \cdot 2^x}_{son\ términos\ semejantes} = -10$$

$$\underbrace{\left(\frac{7}{2} - 4\right) \cdot 2^x}_{sacando\ factor\ común} = -10$$

$$-\frac{1}{2} \cdot 2^x = -10$$

$$2^x = -10 : \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$2^x = 20$$

$$\log 2^x = \log 20$$

$$x . \log 2 = \log 20$$

$$x = \frac{\log 20}{\log 2}$$

$$x \cong 4{,}3219$$

FUNCIONES Y ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Retomemos el primer problema de este capítulo.
¿Podrían hallar una expresión que permita calcular la cantidad de cortes en función de la cantidad de cabezas de la Hidra?

¿A QUÉ LLAMAMOS FUNCIÓN LOGARÍTMICA?

La **Función Logarítmica** se define como $\boldsymbol{f(x) = \log_b x}$, $f: D \subseteq R \rightarrow R$

b representa la base del logaritmo, la cual debe ser positiva y distinta de 1. ¿Por qué?

El dominio de la función logarítmica está formado por todos los valores reales mayores que cero: $\boldsymbol{Dom\ (f) = \mathbb{R} > 0}$, ya que *x* es el argumento y sólo admite cualquier valor real positivo, así la gráfica tiene una **asíntota vertical en** $x = 0$.

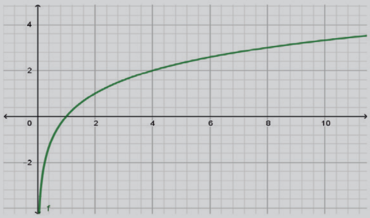
¿Por qué la gráfica tiene una asintota vertical en $x = 0$?

La función tiene por imagen el conjunto $\boldsymbol{Im\ (f) = \mathbb{R}}$

¿POR QUÉ EL DOMINIO ADMITE SOLAMENTE VALORES POSITIVOS?

El dominio de la función logarítmica de la forma $f(x) = \log_b x$ está formado por valores reales positivos, dado que por la definición del logaritmo: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$, la base b es positiva y distinta de 1 $(b > 0 \wedge b \neq 1)$. Por lo tanto, elevada a cualquier exponente c, dará como resultado un número a positivo $(a > 0)$. Entonces, el argumento del logaritmo siempre es positivo.
En la función logarítmica, el argumento está representado por la variable independiente. Entonces, sólo tomará valores positivos, por representar el argumento.

La gráfica de $f(x) = \log_2 x$ es la siguiente



¿Cómo se modifica la gráfica si se le suma o resta un valor constante $\boldsymbol{c}$ y un valor constante $\boldsymbol{d}$ a la función?

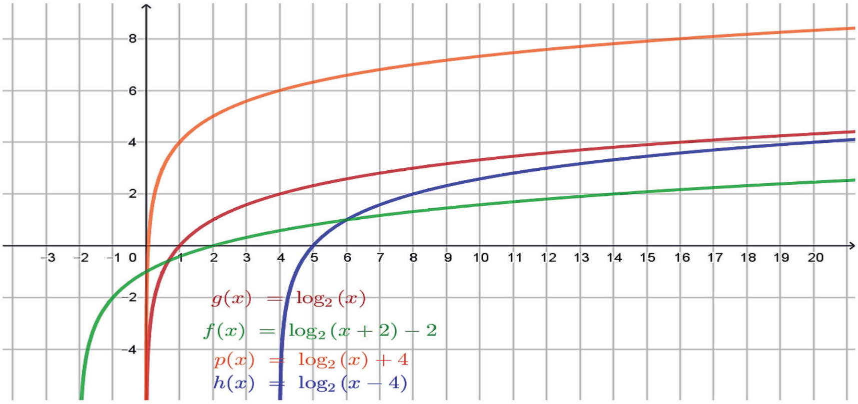
FUNCIÓN LOGARÍTMICA DE LA FORMA $f(x) = \log_b(x - c) + d$

La función logarítmica definida como $f(x) = \log_b(x-c) + d$, $f : D \subseteq R \to R$, sufre un desplazamiento con respecto a la función genérica $f(x) = \log_b(x)$:

- El parámetro c provoca un desplazamiento horizontal de la gráfica, ya que afecta directamente al argumento.
- El parámetro d provoca un desplazamiento vertical de la gráfica, ya que afecta directamente a la función.

Notaremos, en el ejemplo que sigue, que varios elementos de la gráfica se modifican, tales como el dominio, la ecuación de la asíntota, la ordenada al origen y la raíz.

EJEMPLO



¿Han escuchado sobre la escala sismológica de Richter? ¿Cómo se calcula el grado que cuantifica la energía liberada por un terremoto?

$\log I = R$, es la fórmula para expresar en la escala Richter la intensidad R (en grados) de un terremoto en función de la intensidad I.

México no para de temblar: otro sismo de magnitud 6,1 sacudió el sur del país

Según los expertos, el sismo fue una réplica del ocurrido el 7 de septiembre en Oaxaca y se sintió en la capital.

Publicada: 23/09/2017 - 12:03 hs.

Un sismo de magnitud 6,1 en la escala de Richter volvió a sacudir el centro y sur de México, desatando las alarmas apenas cuatro días después de que otro poderoso terremoto de 7,1 causara alrededor de 300 víctimas, informó el Servicio Sismológico Nacional (SSN).

¿Calcularon alguna vez el ph de una sustancia? ¿Saben cómo se calculan los decibeles de una onda sonora? ¿Cómo hacen los arqueólogos para saber cuántos años tiene un fósil?

Los invitamos a ver en YouTube el video “Para qué sirven los logaritmos” de Victoria Alfonsea
https://www.youtube.com/watch?v=BVNl8_9L67k

ECUACIONES LOGARITMICAS

Las **ecuaciones logarítmicas** son aquellas ecuaciones en donde se desconoce el argumento o la base un logaritmo. Para poder resolverlas debemos aplicar su operación inversa, la potenciación y las propiedades del logaritmo.

EJEMPLOS

Nos proponemos resolver las siguientes ecuaciones

$$\log_7 x = 3 \Leftrightarrow 7^3 = x$$
$$343 = x$$

$$\log_x 543 = 5 \Leftrightarrow x^5 = 543$$
$$x = \sqrt[5]{543}$$
$$x \cong 3.523$$

Para poder resolver una ecuación logarítmica, debemos tener el logaritmo despejado, así podremos aplicar la definición.

EJEMPLOS

1. $\underbrace{2 \cdot \log_5 x}_{\substack{primer\\ término}} - \underbrace{4}_{\substack{segundo\\ término}} = -2$

Debemos despejar el término que tiene la incógnita:

$$2 \cdot \log_5 x = -2 + 4$$
$$2 \cdot \log_5 x = 2$$
$$\log_5 x = 2 : 2$$
$$\log_5 x = 1 \Leftrightarrow 5^1 = x$$
$$5 = x$$

Verificamos:

$$2 \cdot \log_5 5 - 4 = -2$$
$$2 \cdot 1 - 4 = -2$$
$$2 - 4 = -2$$
$$-2 = -2$$

2. $\underbrace{5 \cdot \log x + 2 \cdot \log x - \frac{7}{3} \cdot \log x}_{términos\ semejantes} = 7$

$$\underbrace{\left(5 + 2 - \frac{7}{3}\right) \cdot \log x}_{sacando\ factor\ común} = 7$$

$$\frac{14}{3} \cdot \log x = 7$$

$$\log x = 7 : \frac{14}{3}$$

$$\log x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 10^{\frac{3}{2}} = x$$

$$31{,}6227 \cong x$$

Los invitamos a verificar la solución

¿Qué sucede si los argumentos son distintos?

EJEMPLO

$$log_2(x - 3) + log_2(x + 4) = 3$$

Analicemos esta ecuación. Tenemos dos términos (sumandos) con logaritmos que tienen la misma base, pero distintos argumentos, y dentro de esos argumentos está la incógnita x. ¿Cómo podemos "juntar" las x?
Podemos agrupar los términos aplicando las propiedades del logaritmo y luego aplicar la definición.

$$log_2[(x - 3) \cdot (x + 4)] = 3 \Leftrightarrow 2^3 = (x - 3) \cdot (x + 4)$$

¡Atención! Para resolver la ecuación logarítmica debemos resolver otra ecuación, ya estudiada.
¿Saben qué tipo de ecuación es?

$$2^3 = \underbrace{(x - 3) \cdot (x + 4)}_{\substack{aplicamos \\ propiedad\ distributiva}}$$

$$2^3 = x^2 - 3 \cdot x + 4 \cdot x - 12$$

$$8 = x^2 + x - 12$$

$$0 = x^2 + x - 12 - 8$$

$$0 = x^2 + x - 20$$

Resolvemos la ecuación cuadrática, aplicando la fórmula resolvente, para poder resolver la ecuación logarítmica.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-1 \pm 9}{2}$$

Así $x_1 = \frac{-1+9}{2} = 4$ y $x_2 = \frac{-1-9}{2} = -5$

¿Pero ambos valores son solución de la ecuación logarítmica?

Recordemos que la incógnita está en el argumento y éste debe ser positivo. Para ello verificamos los valores obtenidos en la ecuación original:

Si $x = 4$ entonces

$$\log_2(4 - 3) + \log_2(4 + 4) =$$

$$\log_2 \underbrace{(1)}_{es\ "+"} + \log_2 \underbrace{(8)}_{es\ "+"} = 0 + 3$$

$$= 3$$

Si $x = -5$ entonces

$$\log_2(-5 - 3) + \log_2(-5 + 4) =$$

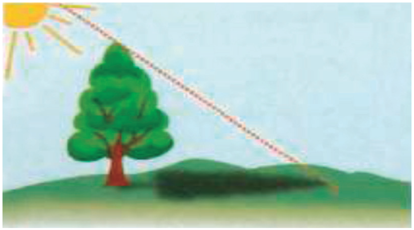
$$\underbrace{\log_2(-8) + \log_2(-1)}_{\substack{los\ argumentos\ de\ ambos \\ logaritmos \\ son \\ negativos.\ \ No\ se\ pueden \\ calcular\ .}}$$

Por lo tanto $x=-5$ no es solución de la ecuación logarítmica

Así, la solución de la ecuación logarítmica es $x = 4$

CAPÍTULO 7

TRIGONOMETRÍA

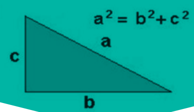


¿Cómo podríamos calcular la altura del árbol si no podemos medirlo directamente?

¿QUÉ SIGNIFICA RESOLVER UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO?

Resolver un triángulo rectángulo es calcular sus elementos (la medida de sus lados y sus ángulos) teniendo como datos dos de ellos. Para esto, solo necesitamos utilizar las **razones trigonométricas** y el **teorema de Pitágoras**.

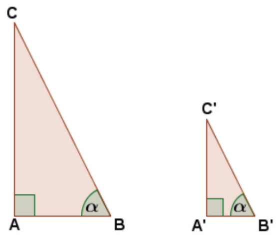
Teorema de Pitágoras
En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



¿Qué son las razones trigonométricas?

Podemos considerar infinitos triángulos rectángulos con un ángulo α congruente y, por lo tanto, todos sus ángulos congruentes. Estos triángulos resultan ser semejantes, entonces todos sus lados son respectivamente proporcionales:

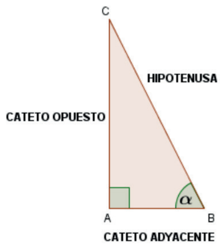
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'B'}} \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'B'}} \qquad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}$$



A cada una de estas proporciones, que se cumplen para cualquier triángulo rectángulo con ángulo α, se les dio un nombre particular:

$$sen\,\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \;;\quad cos\,\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} \;;\quad tan\,\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

Por otro lado, sabemos que el lado $\overline{AC}$ **es el Cateto Opuesto (*CO*)** al ángulo α, $\overline{AB}$ **es el Cateto Adyacente (*CA*)** al ángulo α, y $\overline{CB}$ **es la Hipotenusa (*H*)** (lado opuesto al ángulo recto).



Entonces, las proporciones establecidas con anterioridad, quedan definidas de la siguiente manera:

$$sen\ \alpha = \frac{C0}{H} \qquad csc\ \alpha = \frac{H}{CO}$$

$$cos\ \alpha = \frac{CA}{H} \qquad sec\ \alpha = \frac{H}{CA}$$

$$tan\ \alpha = \frac{CO}{CA} \qquad cot\ \alpha = \frac{CA}{CO}$$

Estas razones trigonométricas no dependen de las longitudes de los lados sino exclusivamente del ángulo α.

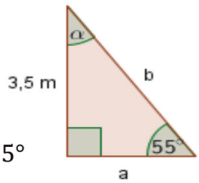
OBSERVACIÓN:
Las razones trigonométricas cosecante, secante y cotangente son las recíprocas a las razones seno,coseno y tangente respectivamente.

$$csc\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha} \qquad sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha} \qquad cot\ \alpha = \frac{1}{tan\ \alpha}$$

EJEMPLO

Resolvamos el siguiente triángulo rectángulo:

Tenemos que calcular los datos que faltan: $a, b\ y\ \alpha$.



$$sen\ 55° = \frac{3{,}5}{b}$$

$$b = \frac{3{,}5}{sen\ 55°}$$

$$\boxed{b \cong 4{,}27}$$

$$tan\ 55° = \frac{3{,}5}{a}$$

$$a = \frac{3{,}5}{tan\ 55°}$$

$$\boxed{a \cong 2{,}45}$$

$$\alpha = 180° - 90° - 55°$$

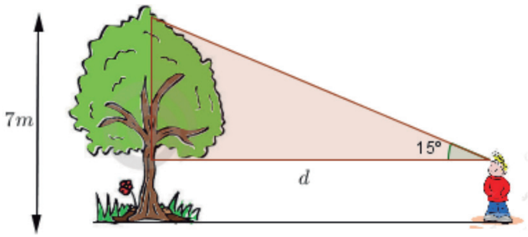
$$\boxed{\alpha = 35°}$$

EJEMPLO

Una persona que mide $1{,}69$ m observa un pájaro que se posó sobre el extremo superior de la copa de un árbol de 7 m de altura. ¿A qué distancia se encuentra del árbol si el ángulo de elevación del observador es de 15^{o}?
Realicen la representación gráfica de la situación.

¿Qué es el ángulo de elevación?

El **ángulo de elevación** es el ángulo formado por la línea horizontal y la visual cuando el objeto o punto observado se encuentra por encima de la línea horizontal.
De esta manera, la representación gráfica del ejemplo sería la siguiente:

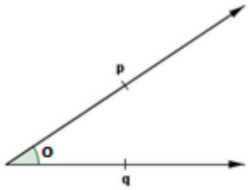


Les proponemos resolver el problema utilizando las razones trigonométricas

En caso de que dicho punto u objeto se encuentre por debajo de la línea horizontal, el ángulo que se forma se llama **ángulo de depresión**.

¿Podrían proponer alguna situación que involucre un ángulo de este tipo?

Consideremos en el plano un punto *o* y dos semirrectas con origen en dicho punto.



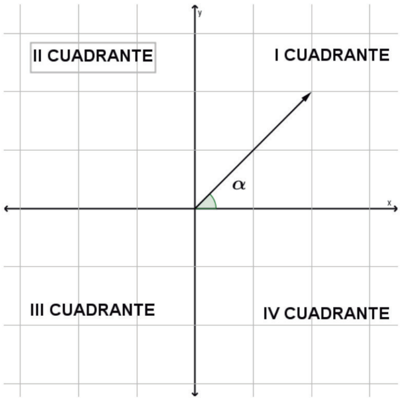
$\overline{oq}$ es el lado inicial del ángulo y $\overline{op}$ es el lado terminal.

Llamamos ángulo orientado $q\hat{o}p$ al ángulo generado por la rotación, en sentido contrario a las agujas del reloj, de la semirrecta $\overline{oq}$ hacia la posición de la semirrecta $\overline{op}$.
El ángulo $q\hat{o}p$ está orientado en **sentido positivo**, $\overline{oq}$ es el lado inicial de $q\hat{o}p$ y $\overline{op}$ es el lado final de $q\hat{o}p$.
Si el ángulo va en sentido de las agujas del reloj, decimos que el ángulo está orientado en **sentido negativo**.

¿CÓMO UBICAMOS ÁNGULOS EN UN SISTEMA DE EJES CARTESIANOS?

Ubicamos en un sistema de coordenadas cartesianas un ángulo orientado que cumple con las siguientes condiciones:

- Su vértice coincide con el origen de coordenadas.
- El lado inicial coincide con el semieje positivo de las x y queda fijo. El lado terminal gira a partir de este semieje.
- Si el lado terminal gira en sentido antihorario, el ángulo es positivo; y si gira en sentido horario, es negativo.
- Para referirnos a su ubicación, consideramos el plano cartesiano dividido en cuatro sectores, llamados **cuadrantes**, según se localice el lado terminal.



Ubiquen en un sistema de ejes cartesianos los siguientes ángulos e indiquen a qué cuadrante pertenecen.

$\alpha=45°$ $\beta=-30°$ $\gamma=405°$ $\delta=330°$

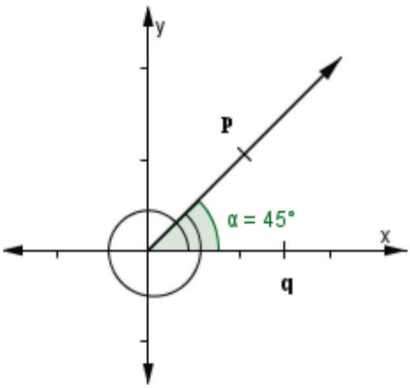
ÁNGULOS CONGRUENTES

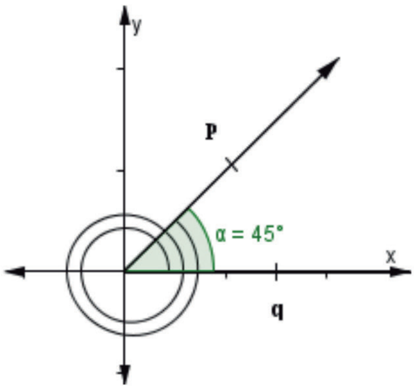
Se denominan ángulos **congruentes** a aquellos cuyos lados iniciales y terminales coinciden, aunque pueden diferir en la cantidad de giros.

EJEMPLO

$\alpha = 45°, \beta = 405°\ y\ \gamma = 765°$ son ángulos congruentes, ya que:

$$405° = 360° + 45° \quad \wedge \quad 765° = 2\,.\,360° + 45°$$





SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Existen diversos sistemas de medición de ángulos, los más utilizados son los siguientes:

- **Sistema sexagesimal**
- **Sistema circular**

SISTEMA SEXAGESIMAL

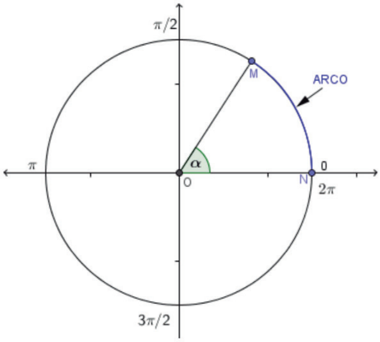
De los sistemas de medición angular el más utilizado es el **sexagesimal,** cuya unidad de medida es el **grado** (°).
Las submedidas de este sistema son los minutos y segundos.

- Si dividimos un grado en sesenta partes iguales, obtenemos un minuto, es decir: $\frac{1°}{60} = 1'$.
- Si dividimos un minuto nuevamente en sesenta partes iguales, obtenemos un segundo, es decir: $\frac{1'}{60} = 1''$.

SISTEMA CIRCULAR

En este sistema la unidad de medida es el **radián.**
El radián es un ángulo central, cuyo arco es igual al radio de la circunferencia a la cual pertenece.

Ángulo central: es el ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y los lados son radios de ella.



Pueden mirar el GIF "¿Qué es un radián?" que se encuentra en la plataforma.

$$\boldsymbol{Medida\ del\ arco\ de\ la\ circunferencia = radio\ de\ la\ circunferencia \Rightarrow |\overline{MN}| = |\overline{OM}| = |\overline{ON}|}$$

¿Cuántos radianes mide la vuelta completa que realiza el ángulo central de una circunferencia?

EJEMPLO

Expresemos en sistema circular cada uno de los siguientes ángulos:

$$\alpha = 35° \qquad \beta = 80°$$

Sabemos que una circunferencia completa tiene $360°$ y su longitud es $2\ \pi\ r$ (perímetro de la circunferencia), entonces podemos establecer la siguiente equivalencia:

$$360° = \frac{2.\pi\ .r}{r} \Longrightarrow 360° = \ 2.\pi\ radianes$$

¿Por qué hacemos esta división?

También podemos establecer las siguientes equivalencias:

$$180° = \pi \quad 90° = \frac{1}{2}\pi \qquad 270° = \frac{3}{2}\pi$$

Luego, retomando el ejemplo tenemos:

$$\frac{360°}{35°} = \frac{2\pi}{x} \Rightarrow \frac{360°}{35°} \cdot x = 2\pi \Rightarrow x = 2\pi \cdot \frac{35°}{360°}$$

Les proponemos realizar el pasaje a radianes del ángulo β.

Expresen en sistema sexagesimal los siguientes ángulos:

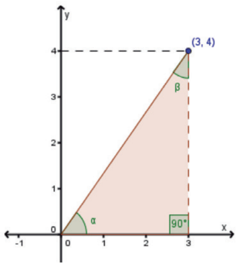
$$\alpha = \frac{5}{6}\pi \qquad \beta = \frac{2}{3}\pi$$

ÁNGULOS Y RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS EJES CARTESIANOS

EJEMPLO

Sabiendo que el punto $(3; 4)$ es el extremo del lado terminal del ángulo , realicemos una representación gráfica de dicho ángulo en el plano cartesiano y hallemos las seis razones trigonométricas correspondientes a él.

La representación gráfica quedaría de la siguiente manera:



Para hallar las razones trigonométricas debemos calcular la hipotenusa, asumiendo que los catetos miden 3 y 4 respectivamente. Usando el Teorema de Pitágoras tenemos:

$$h = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$sen\,\alpha = \frac{4}{5}$$

$$cos\,\alpha = \frac{3}{5}$$

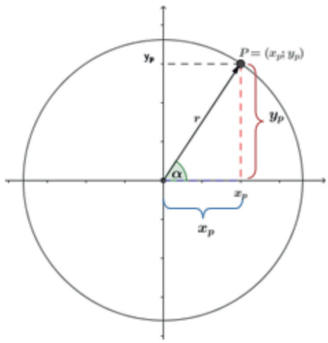
Les proponemos calcular las restantes razones trigonométricas.

¿Cómo representarían en los ejes cartesianos un ángulo cuyo punto extremo es $(-2; 3)$? ¿Qué signos tendrán las razones trigonométricas en ese caso?

SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

El signo de las razones trigonométricas depende del cuadrante al que pertenezca el punto P, más precisamente depende de los signos de las coordenadas del punto. ¿Por qué?

Notemos que y_p representa el cateto opuesto al ángulo α y "x_p" representa el cateto adyacente. Así, las razones trigonométricas elementales quedan definidas como:

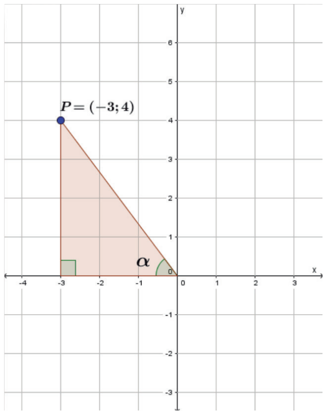


$$sen\,\alpha = \frac{CO}{H} = \frac{\boldsymbol{y_p}}{\boldsymbol{r}} \quad \wedge \quad cos\,\alpha = \frac{CA}{H} = \frac{\boldsymbol{x_p}}{\boldsymbol{r}}$$

De esta manera, como el radio siempre es un valor positivo, el signo del seno queda determinado por el signo de la coordenada "y_p" del punto P y el signo del coseno se corresponde con el de la coordenada "x_p".

EJEMPLO

Determinemos los signos de las razones trigonométricas del ángulo α sabiendo que en el punto $(-3; 4)$ se encuentra el extremo del lado terminal.



Notemos que, si queremos saber únicamente el signo de las razones, no es necesario calcularlas:

- como la coordenada y_p es positiva, entonces *sen* α será positiva.
- como la coordenada x_p es negativa, *cos* α resultará negativa.

Sabiendo el signo del seno y del coseno podemos determinar el signo de las restantes razones trigonométricas. Veamos qué signo le corresponde a cada una:

$sen\ \alpha = +$ $\quad$ $cos\ \alpha = -$ $\quad$ $tan\ \alpha = -$

$csc\ \alpha = +$ $\quad$ $sec\ \alpha = -$ $\quad$ $cot\ \alpha = -$

Les proponemos calcular los signos de las razones trigonométricas para los puntos $P = (-4; -5)$ y $Q = (2; -6)$

Podemos completar la siguiente tabla teniendo en cuenta que:

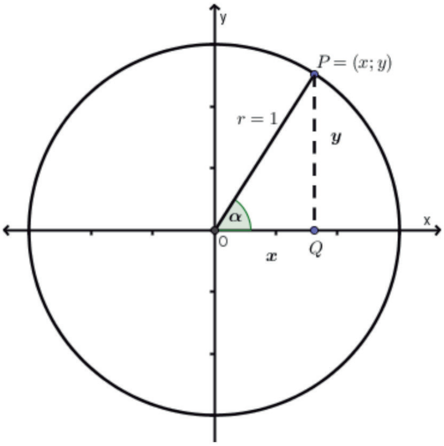
- El $I\ C$ se forma con el eje x positivo y el eje y positivo.
- El $II\ C$ se forma con el eje x negativo y el eje y positivo.
- El $III\ C$ se forma con el eje x negativo y el eje y negativo.
- El $IV\ C$ se forma con el eje x positivo y el eje y negativo.

Cuadrantes / **Razones**	*I*	*II*	*III*	*IV*
sin α	+	+	-	-
cos α	+	-	-	+
tan α	+	-	+	-
csc α	+	+	-	-
sec α	+	-	-	+
cot α	+	-	+	-

LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA O UNITARIA

Como vimos, las razones trigonométricas de un ángulo no dependen de la longitud de los lados, sino única y exclusivamente del ángulo en sí. Por esa razón, podemos considerar una circunferencia de centro en el punto $(0; 0)$ y con radio de longitud 1.

Tomemos un punto P en la circunferencia y marquemos el segmento $\overline{OP}$ (el cual tiene longitud uno, por ser el radio de la circunferencia). De esta manera, queda delimitado el ángulo α.



Lo expuesto a continuación es válido para cualquier ángulo de cualquier cuadrante.

Veamos cómo quedan expresadas las razones trigonométricas elementales en la circunferencia unitaria:

- $\boldsymbol{sen\,\alpha} = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = \boldsymbol{y}$
- $\boldsymbol{cos\,\alpha} = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = \boldsymbol{x}$

Entonces, podemos establecer que, en la circunferencia trigonométrica, el *seno* y el *coseno* de un ángulo resultan las coordenadas x e y del punto P respectivamente. A partir de las razones trigonométricas seno y coseno, podemos definir las restantes: tangente, secante, cosecante y cotangente.

- $\boldsymbol{csc\,\alpha} = \frac{r}{y} = \frac{1}{y} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{sen\,\alpha}}$
- $\boldsymbol{sec\,\alpha} = \frac{r}{x} = \frac{1}{x} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{cos\,\alpha}}$
- $\boldsymbol{tan\,\alpha} = \frac{y}{x} = \frac{\boldsymbol{sen\,\alpha}}{\boldsymbol{cos\,\alpha}}$
- $\boldsymbol{cotg\,\alpha} = \frac{x}{y} = \frac{\boldsymbol{cos\,\alpha}}{\boldsymbol{sin\,\alpha}}$

Las **identidades trigonométricas** son igualdades que involucran razones trigonométricas. Estas igualdades son verificables para cualquier valor que pudieran tomar los ángulos de las razones.

Entre las identidades trigonométricas más importantes encontramos la siguiente:

IDENTIDAD PITAGÓRICA

$$sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$$

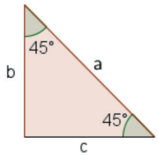
Les proponemos demostrar la Identidad Pitagórica.
Sugerencia: Utilicen el Teorema de Pitágoras sobre el triángulo de la representación anterior en la circunferencia trigonométrica.

CÁLCULO EXACTO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ALGUNOS ÁNGULOS

Vamos a calcular las razones trigonométricas para algunos ángulos particulares:

ÁNGULO DE 45°

Si en un triángulo rectángulo uno de sus ángulos mide 45°, el otro debe medir lo mismo. Por lo tanto, se trata de un triángulo isósceles y los catetos b y c deben ser iguales.



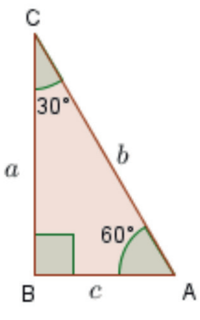
Calculemos la hipotenusa considerando que b y c son iguales:

$$a^2 = c^2 + b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 + b^2} \Rightarrow a = \sqrt{2 \cdot b^2} \Rightarrow a = b \cdot \sqrt{2}$$

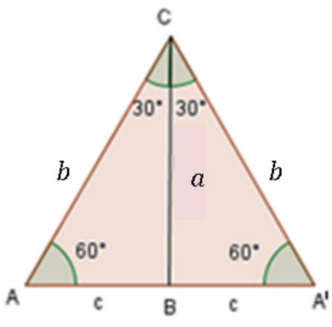
Entonces, calculamos el seno y el coseno, que resultan iguales como habíamos deducido:

$$sen\,45° = \frac{b}{a} = \frac{b}{b.\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad cos\,45° = \frac{c}{a} = \frac{b}{a} = \frac{b}{b.\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

ÁNGULOS DE 30° Y 60°



Si duplicamos este triángulo en forma simétrica, obtenemos el triángulo equilátero AΔCA de la derecha.



Por ser equilátero $2c=b$

$$b^2 = c^2 + a^2 \Rightarrow (2c)^2 = c^2 + a^2 \Rightarrow 4c^2 - c^2 = a^2 \Rightarrow 3c^2 = a^2 \Rightarrow \sqrt{3}c = a$$

Por lo tanto:

$$sen\,30° = \frac{c}{b} = \frac{c}{2c} = \boxed{\frac{1}{2}} \qquad \wedge \qquad cos\,30° = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}.c}{2.c} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$sen\,60° = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}.c}{2.c} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \wedge \qquad cos\,60° = \frac{c}{b} = \frac{c}{2c} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Podemos concluir la siguiente tabla:

sen	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	90°	60°	45°	30°	0°

Estos ángulos pertenecen al primer cuadrante. ¿Y si pertenecieran a otros cuadrantes?

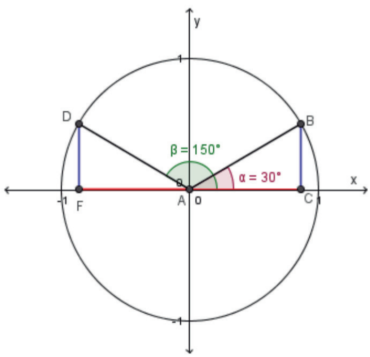
Podemos calcular de manera exacta las razones trigonométricas de algunos ángulos pertenecientes al II, III o IV cuadrante, comparándolos con los ángulos particulares del $I\ C$.

EJEMPLO

Comparemos el ángulo de $150° \in II\ C$, con el ángulo de $30° \in I\ C$.
Expresemos a $150°$ usando ángulos particulares y los que se forman con cada uno de los ejes.
Podemos hacerlo de dos formas:

- $150° = 180° - 30°$
- $150° = 90° + 60°$

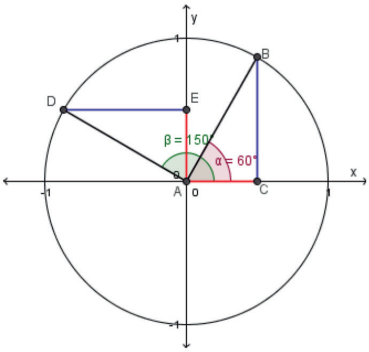
Analicemos la primera opción:
Usamos la circunferencia trigonométrica para comparar las razones trigonométricas del ángulo $180° - 30°$ del $II\ C$ con el de $30°$ del $I\ C$. Es decir, comparamos los triángulos rectángulos congruentes $\overline{DFA}$ y $\overline{BCA}$ y vemos que la medida de $\overline{DF}$ es igual a la de $\overline{BC}$; por lo tanto, podemos asegurar que:



$$sen(150°) = sen(180° - 30°) = sen(30°) = \frac{1}{2}$$

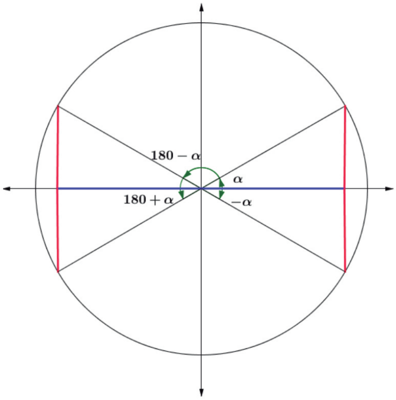
Si analizamos la segunda forma de expresar $150°$, podemos comparar en la circunferencia los triángulos congruentes $\overline{AED}$ y $\overline{ACB}$ y vemos que la medida de $\overline{AE}$ es igual a la de $\overline{AC}$; por lo tanto, podemos asegurar que:

$$sen(150°) = sen(90° + 60°) = cos(60°) = \frac{1}{2}$$



Entonces, podemos calcular las razones trigonométricas de ángulos del II, III o IV cuadrante, haciendo su reducción al I cuadrante.

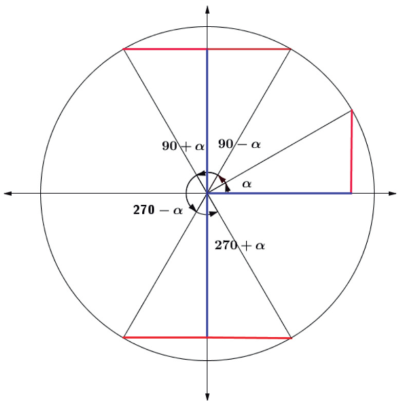
Cuando un ángulo se encuentra situado en el segundo, tercero o cuarto cuadrante siempre es posible relacionarlo con otro del primer cuadrante cuyas razones trigonométricas tengan los mismos valores absolutos. Debemos considerar su signo según en qué cuadrante se ubique. Por ejemplo:



$sen\,\alpha = sen(180° - \alpha)$

$sen\,\alpha = -\,sen(180° + \alpha)$

$sen\,\alpha = -\,sen-(\alpha)$



$sen\,\alpha = cos(90° - \alpha)$

$sen\,\alpha = -cos(90° + \alpha)$

$sen\,\alpha = -cos(270° - \alpha)$

$sen\,\alpha = cos(270° + \alpha)$

Les proponemos calcular, sin el uso de la calculadora, el $sen\ 240°$ utilizando los ángulos particulares analizados.

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una ecuación trigonométrica es una ecuación en la que aparecen una o más razones trigonométricas. Es decir, debemos calcular el o los ángulos que verifican la igualdad.
Al principio de este capítulo trabajamos con ecuaciones trigonométricas simples. Ahora estudiaremos algunas más.

EJEMPLO

Resolvamos la ecuación $2 \cdot cos\ x - \sqrt{2} = 0$

$$2 \cdot cos\ x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow 2 \cdot cos\ x = \sqrt{2} \Rightarrow cos\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Obtuvimos que el coseno de un ángulo es igual a un valor positivo; por lo tanto, ese ángulo puede pertenecer al primer o al cuarto cuadrante.
Por lo que hemos estudiado, si denominamos α a un ángulo cualquiera del primer cuadrante, podemos expresar como $360° - \alpha$ a un ángulo del cuarto cuadrante.
Como ya sabemos, para calcular el ángulo basta con aplicar la función inversa del coseno en nuestra calculadora, pero en el visor sólo aparecerá un solo ángulo.

$$cos\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow x = 45°$$

$45°$ es un ángulo del primer cuadrante; por lo tanto, sería nuestro α. Nos faltaría determinar el valor del ángulo del cuarto cuadrante: $360° - \alpha = 360° - 45° = 315°$.
Así, la ecuación tiene dos soluciones posibles en el intervalo $[0;2\pi]$: $S = \{45°;315°\}$

Les proponemos resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas sabiendo que $\alpha \in [0; 2\pi]$

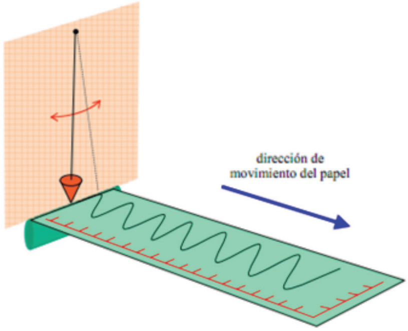
$2\ sen\ x - 1 = 0$ $\qquad$ $2\ cos\ x - 3\ tan\ x = 0$

Es conveniente expresar todos los términos en función de alguna de las razones trigonométricas elementales.

CAPÍTULO 8

FUNCIONES Y ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

En la vida cotidiana existen muchos movimientos que se repiten a intervalos de tiempo iguales, por esa razón se denominan *movimientos periódicos*. Para estudiarlos tomemos como ejemplo un péndulo simple que oscila en un plano vertical. La variación de la posición de la pesa en el eje *x* puede registrarse si colocamos un marcador en la punta del péndulo y una cinta transportadora con un papel debajo de él. La curva que queda trazada sobre el papel se denomina *sinusoide* y describe el movimiento de vaivén del péndulo simple en función del tiempo.



Esta situación, y en general muchos fenómenos que se repiten de forma periódica, se modelizan utilizando funciones que se denominan **trigonométricas**. En este capítulo trabajaremos con las funciones seno y coseno.

FUNCIÓN SENO

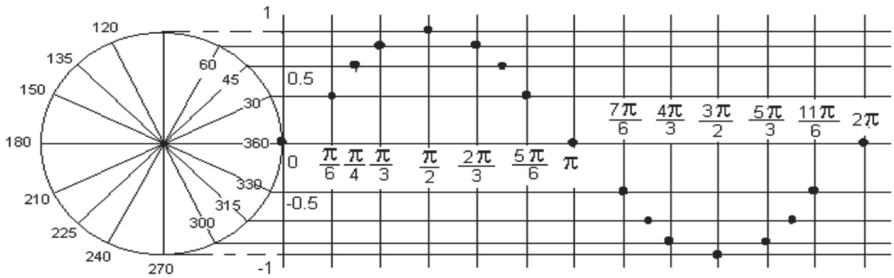
Nos proponemos aproximarnos a la representación gráfica en coordenadas cartesianas de la **Función Seno**.

Para ello elaboramos la siguiente tabla, asignando a la variable x los valores de los ángulos especiales en grados (y sus equivalentes de los otros cuadrantes) junto con su conversión al sistema circular, en radianes.

En las funciones trigonométricas la variable independiente toma como valores medidas de ángulos. Ya que las funciones en general tienen como dominio números reales (en vez de ángulos), nos conviene trabajar en el sistema circular, cuya medida es el **radián**.

x (GRADOS)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
x(RADIANES)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$sen\,x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

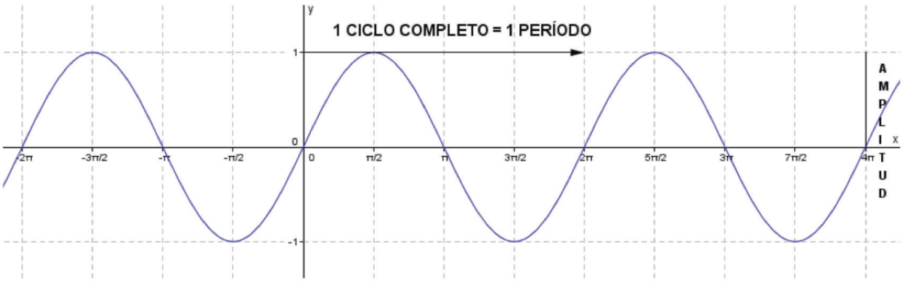
En la última fila calculamos el valor de la función $f(x) = sen(x)$ para cada uno de esos ángulos y al representarlos en un sistema de ejes cartesianos obtenemos la siguiente curva:



Aprovechamos la circunferencia trigonométrica para graficar. La coordenada y de cada punto es igual a la altura del triángulo rectángulo que se forma para cada ángulo con el eje de abscisas.

¿Qué ocurre con la curva si asignamos a la variable x valores de ángulos mayores a 2π? ¿Y menores a cero?

Como la variable independiente puede tomar cualquier valor real, al incluir los valores negativos y los valores mayores a 2π queda determinada la **curva sinusoide** que se representa a continuación:



ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE LA FUNCIÓN $f(x) = sen\ x$

En primer lugar, podemos observar que la curva está formada por repeticiones periódicas de un tramo con igual forma y, por esta razón, a este tipo de funciones se las llama **Funciones Periódicas**. A este tramo se le da el nombre de ***ciclo***; para la función $sen(x)$ la longitud de un ciclo es de 2π, es decir, el período es 2π.

En nuestro ejemplo inicial del péndulo, se repite el movimiento de la pesa que va y vuelve desde su posición inicial. Cada una de esas idas y vueltas se ven representadas en la curva del papel como un mismo ciclo que se repite indefinidamente.

Resumimos algunas de las características de la función seno:

- **Dominio e Imagen***:* La función $f(x) = sen(x)$ tiene por dominio el conjunto de los números reales, es decir, el ángulo $x \in \mathbb{R}$. Analizando la gráfica, podemos observar que los valores que toma la variable dependiente , es decir, el conjunto de la imagen, se encuentran entre -1 y 1. Así podemos establecer que:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ \boldsymbol{Dom}\ (f) = \mathbb{R} \quad \wedge \quad \boldsymbol{Im}\ (f) = [-1; 1]$$

- **Periodicidad:** La sinusoide es periódica, lo que significa que su ciclo se repite cada un cierto período. En la función $f(x) = sen(x)$, como mencionamos anteriormente, el **período** es 2π. Indicaremos el período con el símbolo $\mathbf{T}$. Al estudiar los elementos de la sinusoide, consideraremos solamente el ciclo entre 0 y 2π.

- **Raíces:** Las raíces son aquellos valores de x en los que se anula la función *seno*. Estos valores, entre 0 y 2π, son $x = 0$, $x = \pi$ y $x = 2\pi$. Entonces los puntos $(0; 0)$, $(\pi; 0)$ y $(2\pi; 0)$ son las raíces.

- **Valor máximo:** La función $f(x) = sen(x)$ alcanza su valor máximo, en el período analizado, en $x = \frac{\pi}{2}$. Entonces el punto máximo es $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$.

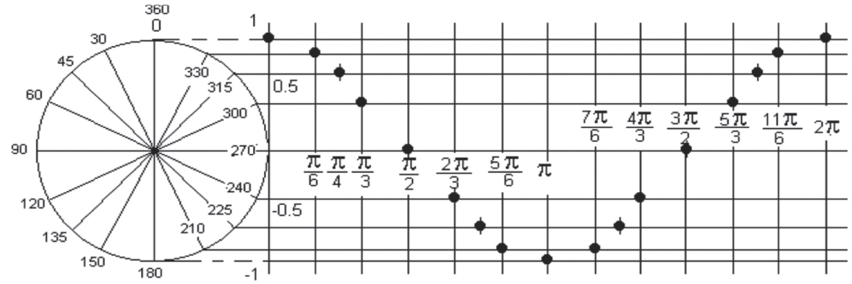
- **Valor mínimo:** La función $f(x) = sen(x)$ alcanza su valor mínimo, dentro del mismo período, en $x = \frac{3}{2}\pi$. El punto mínimo es, entonces, $\left(\frac{3}{2}\pi; -1\right)$.

En el punto máximo y en el mínimo la coordenada y es igual a 1 y -1 respectivamente ¿Por qué?

FUNCIÓN COSENO

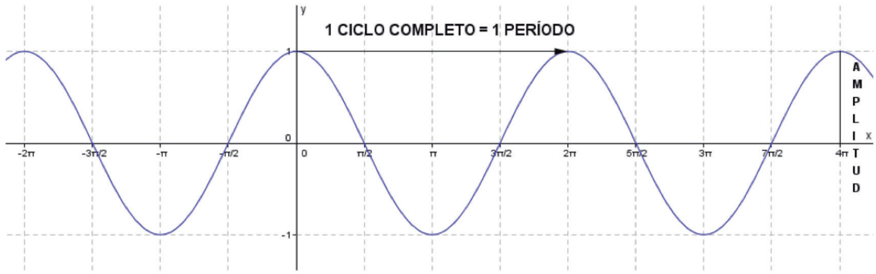
La función coseno $f(x) = cos\ (x)$ posee el mismo dominio, imagen y periodicidad que la función *seno*, aunque no así los valores de raíces, máximos y mínimos. ¿Por qué?

De la misma manera que en el ítem anterior, utilizamos la circunferencia trigonométrica para obtener algunos puntos de la gráfica de la función $f(x) = cos(x)$. En forma aproximada, queda representada por la siguiente curva:



Comparemos esta curva con la anterior del seno ¿Por qué rotamos la circunferencia $90°$?

Nuevamente, como la variable independiente puede tomar cualquier valor real, al incluir los valores negativos y los valores mayores a 2π queda determinada la curva que se representa a continuación:



ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE LA FUNCIÓN $f(x) = cos\ x$

- **Dominio e Imagen**: La función $f(x) = cos(x)$ tiene por dominio el conjunto de los números reales, es decir, el ángulo $x \in \mathbb{R}$. Analizando la gráfica, podemos observar que los valores que toma la variable y, es decir, el conjunto de la imagen, se encuentran entre -1 y 1. Así podemos establecer que:

$$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R};\ Dom\ (f) = \mathbb{R} \quad \wedge \quad Im\ (f) = [-1; 1]$$

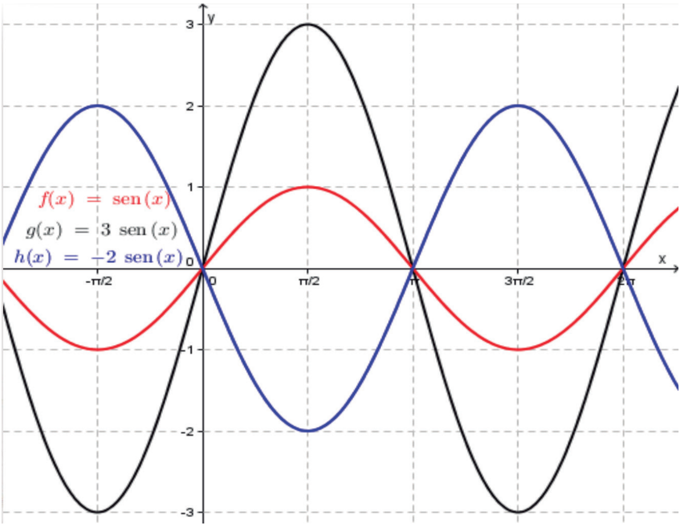
- **Raíces:** Las raíces de la función $f(x) = cos(x)$ son aquellos valores de x donde la función toma valor 0. En el período estudiado, estos valores son $x = \frac{\pi}{2} \wedge x = \frac{3}{2}\pi$. Entonces los puntos $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ y $\left(\frac{3}{2}\pi; 0\right)$ son las raíces.

- **Valor máximo:** La función $f(x) = cos(x)$ alcanza su valor máximo en $x = 0 \wedge x = 2\pi$, en el mismo período. Los puntos máximos son, entonces, $(0; 1)$ y $(2\pi; 1)$.

- **Valor mínimo:** La función $f(x) = cos(x)$, en el período analizado, alcanza su valor mínimo en $x = \pi$. El punto mínimo es, entonces, $(\pi; -1)$.

ANÁLISIS DE LOS PARÁMETROS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

A continuación, consideramos la función de la forma $\boldsymbol{f(x) = a \cdot sen\ (bx - c) + d}$ y analizamos por separado cada uno de los parámetros a, b, c y d. Estudiaremos solamente la función seno porque el mismo análisis es válido para ambas funciones. Observemos las siguientes gráficas correspondientes a las funciones f; g; h que tienen la forma $f(x) = a \cdot sen\ (x)$:



Podemos establecer que el parámetro $\boldsymbol{a}$ no modifica el dominio, el período ni las raíces.

¿Qué elementos de la sinusoide modifica el parámetro $\boldsymbol{a}$?

Analizando las funciones representadas anteriormente en el período $[0; 2\pi]$, podemos observar que los puntos máximos y mínimos cambian de una función a otra. Estos se muestran en el cuadro a continuación.

	Puntos máximos	Puntos mínimos
$f(x) = sen\ x$	$\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi; -1\right)$
$g(x) = 3\ sen\ x$	$\left(\frac{\pi}{2}; 3\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi; -3\right)$
$h(x) = -2\ sen\ x$	$\left(\frac{3}{2}\pi; 2\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}; -2\right)$

Analizando el conjunto imagen, podemos observar que son diferentes para las tres funciones:

- $Im\ (f) = [\ -1; 1]$
- $Im\ (g) = [\ -3; 3]$
- $Im\ (h) = [\ -2; 2]$

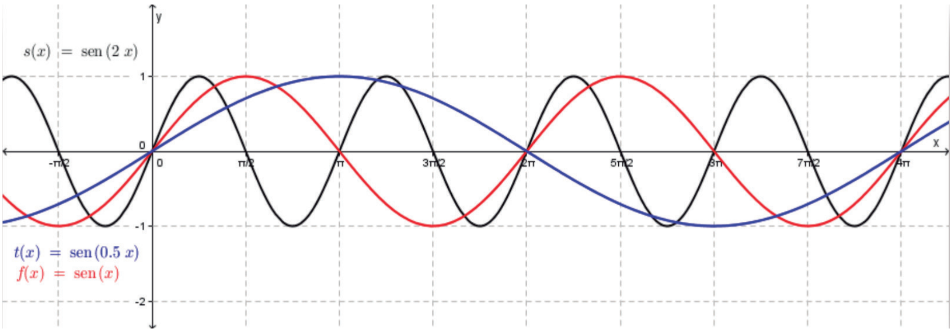
Es decir, estas curvas varían en su **amplitud**.

PARÁMETRO a

El módulo del parámetro a, es decir, $|a|$ indica la **amplitud** de la función periódica y modifica su imagen, sus valores máximos y mínimos.

$$Im\ (f) = [\ -a; a]$$

Analicemos, a continuación, las gráficas de las funciones f; s; t que tienen la forma $f(x) = sen\ (b \cdot x)$



¿Qué elementos de la sinusoide modifica el parámetro b?

Podemos determinar que el dominio e imagen de las tres funciones son iguales, y ocurre lo mismo con las amplitudes de las tres curvas.
Sin embargo, podemos observar en el gráfico que el período, las raíces y los puntos máximos o mínimos son diferentes para las tres curvas. En la tabla que sigue, analizamos estos elementos para cada una de las funciones en un ciclo.

	Período	Raíces	Punto Máximo	Punto mínimo
$f(x) = sen\, x$	2π	$(0;0)$ $(\pi;0)$ $(2\pi;0)$	$\left(\frac{\pi}{2};1\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi;-1\right)$
$s(x) = sen(2x)$	π	$(0;0)$ $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ $(\pi;0)$	$\left(\frac{\pi}{4};1\right)$	$\left(\frac{3}{4}\pi;-1\right)$
$t(x) = sen(0,5x)$	4π	$(0;0)$ $(2\pi;0)$ $(4\pi;0)$	$(\pi;1)$	$(3\pi;-1)$

¿Cuántos ciclos de la función $s(x)$ caben en un ciclo de la función $f(x)$?
¿Y cuántos ciclos de la funcion $t(x)$ en $f(x)$?

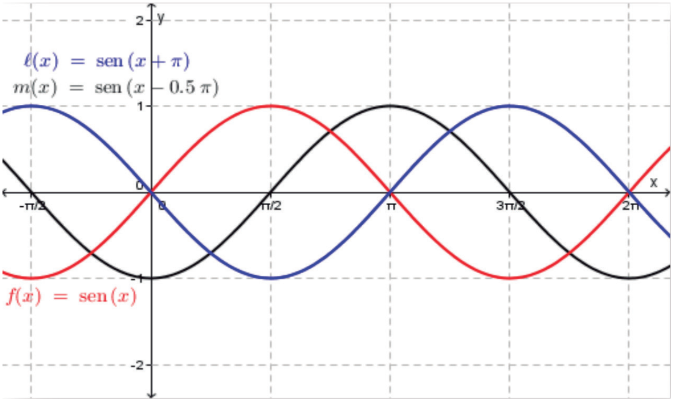
PARÁMETRO b

Se denomina **pulsación o frecuencia** al parámetro $\boldsymbol{b}$ e indica el número de períodos o ciclos que realiza la función cada 2π radián. Por lo tanto, con el parámetro b se determina el período $\boldsymbol{T}$ de la función y se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{|b|}}$$

¿Podrán explicar esta fórmula?

Estudiemos ahora las siguientes gráficas correspondientes a las funciones f; l; m que tienen la forma $f(x) = sen(x - c)$.



¿Qué elementos de la sinusoide modifica el parámetro c?

Podemos ver que las gráficas mantienen la forma pero están desplazadas con respecto a $f(x)$, es decir:

- Poseen mismo dominio e imagen.
- Misma periodicidad y amplitud.
- Varían sus raíces y sus puntos máximos y mínimos.
- También se diferencian en el "**punto de inicio del período analizado".**

¿En qué se diferencian las fórmulas de las tres funciones?
¿En qué influye esa diferencia?

PARÁMETRO c Y ÁNGULO DE FASE φ

Al restar una constante c a la variable x, la función se desplaza sobre el eje x, es decir, cambia el punto de inicio de un ciclo de la función. Este punto de inicio recibe el nombre de **ángulo de fase** φ. Los parámetros $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{b}$ nos permiten calcular φ de la siguiente forma:

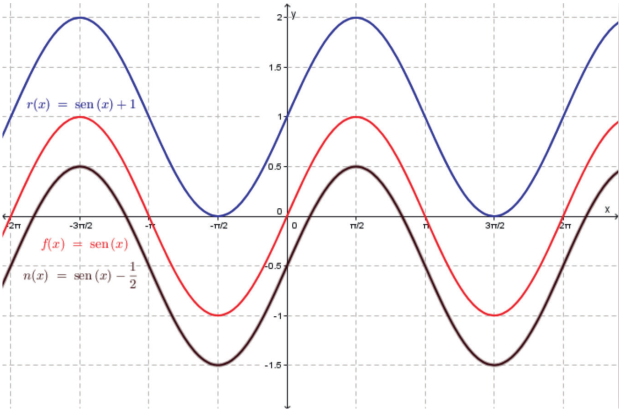
$$\varphi = \frac{c}{b}$$

¿Cómo obtenemos esta fórmula?

Teniendo en cuenta el ángulo de fase φ y el período T de la función, podemos establecer la coordenada x correspondiente al punto final del período analizado de la función: $\boldsymbol{P_f = \varphi + T}$.

Cuando hablamos de "punto inicial" y "punto final" no nos referimos a la función completa, ya que tiene dominio real y, por lo tanto, no tiene puntos inicial y final.
Para facilitar el estudio generalmente se considera un ciclo en particular: el primer ciclo en el semieje positivo de las x.

Analicemos las gráficas de las funciones f; n; r que tienen la forma $f(x) = sen(x) + d$



¿Qué elementos de la sinusoide modifica el parámetro d?

EXPRESIÓN GENERAL DE LA FUNCIÓN SENO

Con los parámetros analizados anteriormente, la expresión general de la función seno es:

$$f(x) = a \cdot sen\,(bx - c) + d \text{ donde } a, b, c, \in R \wedge a \neq 0 \wedge b \neq 0$$

Les proponemos que grafiquen la siguiente función utilizando el análisis de los parámetros estudiados.
$g(x) = 3\ sen\,(-\pi/2 + x)$

RESOLUCIÓN

Para comenzar debemos establecer el valor de los parámetros de la función

$$g(x) = 3\ sen\,(-\pi/2 + x) \rightarrow a = 3; b = 1; c = \frac{\pi}{2}; d = 0$$

Podemos establecer que:

- Teniendo en cuenta $a = 3$ y $d = 0$, podemos establecer el conjunto imagen de la función:

$$Im(g) = [-3; 3]$$

- Teniendo en cuenta $b = 1$ y $c = \frac{\pi}{2}$, podemos establecer período y ángulo de fase:

$$T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \qquad y \qquad \varphi = \frac{\pi/2}{1} = \frac{\pi}{2}$$

Podemos también, establecer con los datos obtenidos las coordenadas de los puntos P_i y P_f

$$P_i = (\varphi; 0) = \left(\frac{\pi}{2}; 0\right) \qquad P_f = (\varphi + T; 0) = \left(\frac{5}{2}\pi; 0\right)$$

- Analíticamente y utilizando ecuaciones trigonométricas, calculamos raíces, puntos máximos y puntos mínimos de la función:

- Raices:

$$0 = 3\ sen\,(-\ \pi/2 + x)$$
$$0{:}\,3 = sen\,(-\ \pi/2 + x)$$
$$arc\ sen(0) = -\ \pi/2 + x$$

$$0 = -\ \pi/2 + x$$
$$\pi/2 = x$$
$$\pi/2 = x$$
$$\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$$

$$\pi = -\ \pi/2 + x$$
$$\pi + \pi/2 = x$$
$$3\pi/2 = x$$
$$\left(\frac{3}{2}\pi; 0\right)$$

$$2\pi = -\ \pi/2 + x$$
$$2\pi + \pi/2 = x$$
$$5\pi/2 = x$$
$$\left(\frac{5}{2}\pi; 0\right)$$

- Máximo:

$$3 = 3\ sen\,(-\ \pi/2 + x)$$
$$3{:}\,3 = sen\,(-\ \pi/2 + x)$$
$$arc\ sen(1) = -\ \pi/2 + x$$
$$\frac{\pi}{2} = -\ \pi/2 + x$$
$$\pi = x$$
$$(\pi; 3)$$

- Mínimo:

$$-3 = 3\ sen\,(-\ \pi/2 + x)$$
$$-3{:}\,3 = sen\,(-\ \pi/2 + x)$$
$$arc\ sen(-1) = -\ \pi/2 + x$$
$$\frac{3}{2}\pi = -\ \pi/2 + x$$
$$2\pi = x$$
$$(2\pi; 3)$$

Te invitamos a que realices el gráfico correspondiente, a partir de los datos obtenidos.

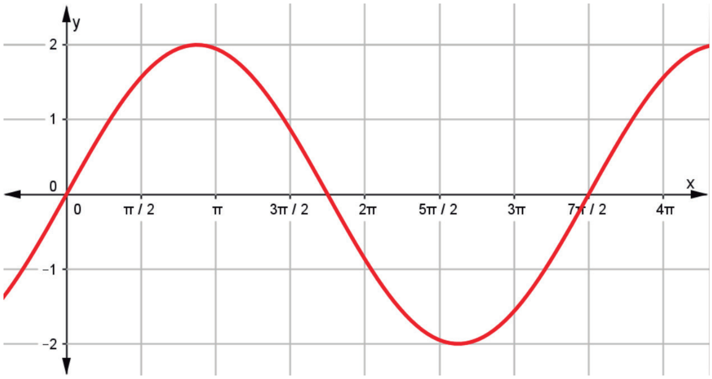
EJEMPLO

A partir del siguiente gráfico, construyan una fórmula que lo represente.

Para construir una fórmula para esta sinusoide, podríamos comenzar por recordar la expresión general:

$$f(x) = a \cdot sen\ (bx - c) + d$$

Es necesario hallar la amplitud (a), la pulsación (b), el período (T), el ángulo de fase φ y el parámetro d.



Si observamos la gráfica, vemos que la función no tiene desplazamiento vertical por lo que $d = 0$.
La amplitud se determina rápidamente, dado que la imagen abarca el intervalo $[-2,2]$. Luego $a = 2$.
El período T se puede calcular como la diferencia entre la coordenada x del P_f y la coordenada x del P_i.
Conociendo, T se puede despejar b a partir de la fórmula $T = \frac{2\pi}{|b|}$.

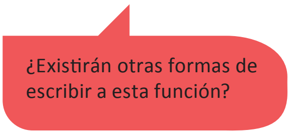
En este caso, $P_i = (0,0)$ y $P_f = \left(\frac{7}{2}\pi, 0\right)$. Luego $T = \frac{7}{2}\pi \rightarrow b = \frac{4}{7}$

Para obtener c, se observa en la gráfica cuál es el ángulo de fase y sabemos que éste se relaciona con el parámetro c mediante la fórmula

$$\varphi = \frac{c}{b}.\ \text{Como } \varphi = 0, \text{ entonces } c = 0$$

Reemplazando los valores obtenidos en la expresión general, la fórmula hallada resulta:

$$\boldsymbol{f(x) = 2.sen\left(\frac{4}{7}x\right)}$$



Este libro es fruto del trabajo conjunto de un grupo de docentes que integramos el equipo de trabajo del PIEXA, Programa de Ingreso a la Facultad de Ciencias Exactas. Durante varios años, y como parte de este programa que se propone articular la escuela y la universidad, tratamos de ajustar un selección de contenidos matemáticos de la escuela secundaria y plasmarlo en un material que ayude a nuestros alumnos a estudiar. También durante estos años construimos estrategias docentes para repasar o para enseñar matemática en este contexto. Justamente el libro pretende ser una herramienta o un medio para acompañar a los estudiantes en sus primeros pasos en esta Facultad.

Matemática: Entre la Secundaria y la Universidad es un libro digital disponible en forma libre y gratuita. Debemos esta posibilidad, que nos enorgullece y nos alegra, al apoyo permanente que recibimos de la Facultad de Ciencias Exactas, nuestra Facultad.

editorial UNICEN

UNICEN
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

CiN REUN
Red de Editoriales de Universidades Nacionales de la Argentina

ISBN 978-987-4901-14-9